Matematyka 2 - Ćwiczenia - Literatura podstawowa

[1.] *Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniami. I, II*, Praca zbiorowa pod redakcją L. Siewierskiego, PWN, Warszawa 1979.

[2.] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach. I, II*, PWN, Warszawa 1994.

[3.] M. Lassak, *Matematyka dla studiów technicznych*, WYDAWNICTWO SUPREMUM, Bydgoszcz 2017.

[4.] R. Leitner, W. Matuszewski, Z. Rojek, *Zadania z matematyki wyższej. I, II*, WNT, Warszawa 1994 (I), 1999 (II).

Matematyka 2 - Ćwiczenia - Literatura uzupełniająca

[1.] J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, WNT, Warszawa 1993.

Liczby zespolone

1. Znaleźć część rzeczywistą i część urojoną następujących liczb zespolonych:

a) $(2-3i)(5+4i)$; **b)** $(5+2i)(5-2i)$; **c)** $(1+i)^3-(1-i)^3$; **d)** $(2-i)^3+(1-i)^2$;

e) $\frac{3+2i}{4-3i}$; **f)** $\frac{1}{i}$; **g)** $\frac{(\sqrt{3}+i)(-1+\sqrt{3}i)}{(1+i)^2}$; **h)** $\frac{(1-i)^2-i}{(1+i)^2+i}$.

2. Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:

a) 4; **b)** -5; **c)** $6i$; **d)** $-7i$;

e) $1+\sqrt{3}i$; **f)** $1-i$; **g)** $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; **h)** $-\sqrt{3}-i$.

3. Obliczyć:

a) $(2+\sqrt{12}i)^5$; **b)** $(1-\sqrt{3}i)^6$; **c)** $(1+i)^{10}$; **d)** $(1+\sqrt{3}i)^{1997}$;

e) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{12}$; **f)** $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{26}$; **g)** $\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{7}$; **h)** $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$.

4. Obliczyć pierwiastki drugiego stopnia z następujących liczb zespolonych:

a) 1; **b)** -1; **c)** i; **d)** $-i$; **e)** $1-\sqrt{3}i$;

f) $-1+i$; **g)** $-3-4i$; **h)** $8+6i$; **i)** $-15+8i$; **j)** $11-60i$.

5. Rozwiązać następujące równania zespolone:

a) $z^2-2z+10=0$; **b)** $z^2-6z+10=0$; **c)** $z^2+z+1=0$;

d) $z^2-(2+i)z-1+7i=0$; **e)** $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$; **f)** $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$;

g) $z^3+8=0$; **h)** $z^3-27=0$; **i)** $z^4-1=0$; **j)** $z^4+4=0$.

Odpowiedzi. 1. a) $22,\ -7$; **b)** $29,\ 0$; **c)** $0,\ 4$; **d)** $2,\ -13$; **e)** $\frac{6}{25},\ \frac{17}{25}$; **f)** $1,\ \sqrt{3}$; **g)** $-1,\ 0$; **h)** $0,\ -1$. **2. a)** $4(\cos 0+i\sin 0)$; **b)** $5(\cos\pi+i\sin\pi)$; **c)** $6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; **d)** $7\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; **e)** $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; **f)** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; **g)** $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; **h)** $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$. **3. a)** $512-512\sqrt{3}i$; **b)** 64; **c)** $32i$; **d)** $2^{1996}-2^{1996}\sqrt{3}i$; **e)** 1; **f)** i; **g)** $-i$; **h)** $512-512\sqrt{3}i$. **4. a)** $-1,\ 1$; **b)** $-i,\ i$; **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; **d)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; **e)** $-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; **f)** $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}\right)$; **g)** $-1+2i,\ 1-2i$; **h)** $-3-i,\ 3+i$; **i)** $-1-4i,\ 1+4i$; **j)** $-6+5i,\ 6-5i$. **5. a)** $1-3i,\ 1+3i$; **b)** $3-i,\ 3+i$; **c)** $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; **d)** $3-i,\ -1+2i$; **e)** $2+i,\ 1-3i$; **f)** $1-i$, $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$; **g)** $1+\sqrt{3}i,\ -2,\ 1-\sqrt{3}i$; **h)** $3,\ -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$; **i)** $1,\ i,\ -1,\ -i$; **j)** $1+i,\ -1+i,\ -1-i$, $1-i$.

Macierze. Wyznaczniki. Układy równań liniowych

6. Wyznaczyć (o ile istnieją) iloczyny macierzy $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$, jeśli:

$$\textbf{a)}\ A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \qquad \textbf{b)}\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{c)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \textbf{d)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. Obliczyć następujące wyznaczniki:

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \quad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \textbf{c)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \quad \textbf{d)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\textbf{e)}\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \textbf{f)}\ \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \textbf{g)}\ \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\textbf{h)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \textbf{i)}\ \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \textbf{j)}\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

8. Wyznaczyć macierze odwrotne do następujących macierzy:

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{c)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \textbf{d)}\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \textbf{e)}\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

9. Wyznaczyć macierze X spełniające następujące równania:

$$\textbf{a)}\ X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}; \quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{c)}\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

10. Wyznaczyć rzędy następujących macierzy:

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}; \quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}; \quad \textbf{c)}\ \begin{bmatrix} 4 & -8 & -4 & 12 & 18 \\ 3 & -6 & -3 & 9 & 12 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{d)}\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \textbf{e)}\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}; \quad \textbf{f)}\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{g)}\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \textbf{h)}\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{i)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \textbf{j)}\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

11. Rozwiązać następujące układy równań liniowych:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 5y & = & 5 \\ x & - & 2y & = & 9 \end{array}\right.$; **b)** $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 10 \\ 5x & - & 10y & = & 25 \end{array}\right.$; **c)** $\left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & - & 4y & = & 5 \\ 9x & - & 6y & = & 2 \end{array}\right.$;

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 14 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 11 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 11 \end{array}\right.$; **e)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 3y & - & z & = & 2 \end{array}\right.$;

f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & - & 8z & = & 8 \\ 4x & + & 3y & - & 9z & = & 9 \\ 2x & + & 3y & - & 5z & = & 7 \\ x & + & 8y & - & 7z & = & 12 \end{array}\right.$; **g)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & - & 6y & + & 2z & + & 3t & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & 5z & + & 7t & = & 1 \\ 2x & - & 3y & - & 11z & - & 15t & = & 1 \end{array}\right.$;

h) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 5y & + & 2z & + & 4t & = & 2 \\ 7x & - & 4y & + & z & + & 3t & = & 5 \\ 5x & + & 7y & - & 4z & - & 6t & = & 3 \end{array}\right.$; **i)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4t & = & 2 \\ 6x & + & 4y & + & 4z & + & 3t & = & 3 \\ 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2t & = & 4 \end{array}\right.$;

j) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & 3z & - & 2t & + & 3u & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 4z & - & t & + & 3u & = & 2 \\ 3x & + & 3y & + & 5z & - & 2t & + & 3u & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 8z & - & 3t & + & 9u & = & 2 \end{array}\right.$;

k) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 6x & + & 4y & + & 5z & + & 2t & + & 3u & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & + & t & + & 2u & = & 3 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & + & t & & & = & -7 \\ 9x & + & 6y & + & z & + & 3t & + & 2u & = & 2 \end{array}\right.$;

l) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & + & u & = & 4 \\ 3x & + & 6y & + & 5z & - & 4t & + & 3u & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 7z & - & 4t & + & u & = & 11 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & - & 3t & + & 3u & = & 6 \end{array}\right.$;

m) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 3y & = & 0 \end{array}\right.$; **n)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$;

o) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 6y & = & 0 \\ 6x & - & 9y & = & 0 \end{array}\right.$; **p)** $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & - & 5y & = & 0 \end{array}\right.$;

q) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 12y & + & 6z & = & 0 \\ 5x & - & 30y & + & 15z & = & 0 \end{array}\right.$; **r)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 6y & + & 10z & = & 0 \\ 6x & - & 9y & - & 15z & = & 0 \end{array}\right.$;

s) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 0 \\ 5x & - & 10y & = & 0 \\ 3x & + & 5y & = & 0 \end{array}\right.$; **t)** $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 6y & = & 0 \\ 6x & - & 9y & = & 0 \\ 2x & - & 3y & = & 0 \end{array}\right.$.

12. Wyznaczyć wartości własne oraz wektory własne następujących macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; **g)** $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

h) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **i)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; **j)** $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Odpowiedzi. 6. a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} 29 & -22 \\ 31 & -24 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 29 & 31 \\ -22 & -24 \end{bmatrix}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$; **b)** $A \cdot B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; **c)** $B \cdot A = \begin{bmatrix} 26 & 39 & 7 \\ 11 & 16 & 3 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 26 & 11 \\ 39 & 16 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$; **d)** $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 38 & 36 \end{bmatrix}$,

$B \cdot A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 5 \\ 22 & 25 & 19 \\ 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 10 & 22 & 6 \\ 15 & 25 & 10 \\ 5 & 19 & 2 \end{bmatrix}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 38 \\ 7 & 36 \end{bmatrix}$. **7. a)** 5; **b)** 5; **c)** 1; **d)** 1; **e)** -10; **f)** -60; **g)** 14; **h)** 8; **i)** 24; **j)** 1000. **8. a)** $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$; **e)** $\begin{bmatrix} \frac{19}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{11}{4} \\ -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{11}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$. **9. a)** $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 8 & \frac{13}{3} \\ -10 & -5 \end{bmatrix}$.
10. a) 2; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 2; **e)** 1; **f)** 1; **g)** 2; **h)** 2; **i)** 4; **j)** 3.
11. a) $x = 5$, $y = -2$; **b)** $x = 5 + 2t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$; **c)** układ sprzeczny; **d)** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; **e)** $x = \frac{1}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$, $z = 0$; **f)** $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$; **g)** $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{16}u_2$, $y = u_1$, $z = -\frac{11}{8}u_2$, $t = u_2$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$; **h)** układ sprzeczny; **i)** $x = \frac{7}{18} + \frac{1}{18}u$, $y = 0$, $z = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}u$, $t = u$, $u \in \mathbb{R}$; **j)** układ sprzeczny; **k)** $x = w_1$, $y = w_2$, $z = 13$, $t = 19 - 3w_1 - 2w_2$, $u = -34$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$; **l)** $x = -\frac{9}{2} - 2w_1 - w_2$, $y = w_1$, $z = w_2$, $t = -\frac{7}{2} + 2w_2$, $u = \frac{3}{2} + 2w_2$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$; **m)** $x = \frac{3}{4}t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$; **n)** $x = -\frac{5}{2}t_1 + 2t_2$, $y = t_1$, $z = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$; **o)** $x = \frac{3}{2}t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$; **p)** $x = 0$, $y = 0$; **q)** $x = 6t_1 - 3t_2$, $y = t_1$, $z = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$; **r)** $x = \frac{3}{2}t$, $y = t$, $z = 0$, $t \in \mathbb{R}$; **s)** $x = 0$, $y = 0$; **t)** $x = \frac{3}{2}t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$. **12. a)** $\lambda_{1,2} = 2$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\lambda_1 = -1$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; **c)** $\lambda_1 = -1$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 2$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; **d)** $\lambda_1 = 0$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 5$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; **e)** $\lambda_1 = 4$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 10$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; **f)** $\lambda_1 = 2$, $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 3$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$; **g)** $\lambda_{1,2} = 2$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; **h)** $\lambda_1 = -2$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 3$, $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; **i)** $\lambda_{1,2} = 0$, $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 3$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; **j)** $\lambda_1 = -1$, $v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\lambda_{2,3} = 0$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Rachunek wektorowy w $\mathbb{R}^3$

13. Obliczyć cosinus i moduł sinusa kąta φ między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

a) $\vec{u} = [1, -2, 2]$, $\vec{v} = [2, 1, -2]$; **b)** $\vec{u} = [-1, 0, 3]$, $\vec{v} = [6, 7, 2]$; **c)** $\vec{u} = [-1, 0, 3]$, $\vec{v} = [3, 0, -9]$.

14. Obliczyć pole równoległoboku opartego na wektorach $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, jeśli $A = (2, 3, -6)$, $B = (6, 4, 4)$, $C = (3, 7, 4)$.

15. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (-1, 0, -1)$, $B = (0, 2, -3)$ i $C = (4, 4, 1)$.

16. Zbadać, czy punkty $P = (0, 0, 3)$, $R = (-1, 2, 4)$ i $S = (2, -4, 1)$ leżą na jednej prostej.

17. Obliczyć objętość równoległościanu opartego na wektorach $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$, jeśli $A = (3, 4, 3)$, $B = (9, 5, -1)$, $C = (1, 7, 0)$, $D = (3, 2, 5)$.

18. Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach $A = (3, 1, 1)$, $B = (1, 4, 1)$, $C = (1, 1, 7)$ i $D = (3, 4, 9)$.

19. Objętość czworościanu $ABCD$ o trzech danych wierzchołkach $A = (2, 0, -1)$, $B = (3, -1, 1)$ i $C = (2, -2, 3)$ jest równa 5. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka D wiedząc, że leży on na osi Oy.

20. Zbadać, czy punkty $P = (0, 3, 4)$, $R = (-1, 2, 2)$, $S = (2, 0, 3)$ i $T = (-1, 1, 1)$ leżą na jednej płaszczyźnie.

Odpowiedzi. 13. a) $-\frac{4}{9}$, $\frac{\sqrt{65}}{9}$; **b)** 0, 1; **c)** -1, 0. **14.** 45. **15.** 9. **16.** Tak. **17.** 12. **18.** 2. **19.** $(0, -8, 0)$ lub $(0, 7, 0)$. **20.** Tak.

Elementy rachunku różniczkowego funkcji dwóch i trzech zmiennych

21. Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego następujących funkcji:

$$\textbf{a)}\ f(x,y)=x^4+y^4-4x^2y^2;\quad \textbf{b)}\ f(x,y)=\sqrt{2xy+y^2};\quad \textbf{c)}\ f(x,y)=e^{xe^y};$$

$$\textbf{d)}\ f(x,y)=y\ln x;\quad \textbf{e)}\ f(x,y)=\ln(x+y^2);\quad \textbf{f)}\ f(x,y)=\ln(x+\ln y);$$

$$\textbf{g)}\ f(x,y)=\frac{x}{y^2};\quad \textbf{h)}\ f(x,y)=\sin^2(2x+y);\quad \textbf{i)}\ f(x,y)=\frac{x-y}{x+y};\quad \textbf{j)}\ f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x};$$

$$\textbf{k)}\ f(x,y,z)=x^3+y^2z^2+3yz+2x+3y;\quad \textbf{l)}\ f(x,y,z)=x^3yz;$$

$$\textbf{m)}\ f(x,y,z)=xy\cos 2z;\quad \textbf{n)}\ f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2};\quad \textbf{o)}\ f(x,y,z)=e^{xy-z}.$$

22. Wyznaczyć wskazane pochodne cząstkowe następujących funkcji:

$$\textbf{a)}\ f(x,y)=e^{xy^2},\ f'''_{yxx};\quad \textbf{b)}\ f(x,y)=\ln(x^2+y^2),\ f'''_{yyx};\quad \textbf{c)}\ f(x,y)=\sin(xy),\ f'''_{yyx};$$

$$\textbf{d)}\ f(x,y,z)=\frac{x^4}{y^2z^3},\ f'''_{zyx};\quad \textbf{e)}\ f(x,y,z)=e^{xyz},\ f'''_{xyz}.$$

23. Wyznaczyć ekstrema lokalne następujących funkcji:

$$\textbf{a)}\ f(x,y)=(x-1)^2+2y^2;\quad \textbf{b)}\ f(x,y)=(x-1)^2-2y^2;$$

$$\textbf{c)}\ f(x,y)=(x+y)^2-xy-x-5y;\quad \textbf{d)}\ f(x,y)=2x^2+3xy+y^2-2x-y+1;$$

$$\textbf{e)}\ f(x,y)=x^2-xy+2y^2-x+4y-5;\quad \textbf{f)}\ f(x,y)=-x^2+xy-y^2-3x+2y-1;$$

$$\textbf{g)}\ f(x,y)=x^2+xy+y^2-6x-4y+5;\quad \textbf{h)}\ f(x,y)=-x^2+xy-y^2+2x-y;$$

$$\textbf{i)}\ f(x,y)=x^3+y^3-3xy;\quad \textbf{j)}\ f(x,y)=y^3+x^2-6xy+3x+6y;$$

$$\textbf{k)}\ f(x,y)=x^3+y^2-6xy-48x;\quad \textbf{l)}\ f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y;$$

$$\textbf{m)}\ f(x,y)=4xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y};\quad \textbf{n)}\ f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y;$$

$$\textbf{o)}\ f(x,y)=(4x+y^2)e^{2x};\quad \textbf{p)}\ f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y;$$

$$\textbf{q)}\ f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z;$$

$$\textbf{r)}\ f(x,y,z)=-x^2-y^2-z^2+8x-6y+12z;$$

$$\textbf{s)}\ f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x+2z-1;$$

$$\textbf{t)}\ f(x,y,z)=\frac{2x^2}{y}+\frac{y^2}{z}-4x+2z^2.$$

Odpowiedzi. 21. a) $f'_x(x,y)=4x^3-8xy^2$, $f'_y(x,y)=4y^3-8x^2y$, $f''_{xx}(x,y)=12x^2-8y^2$, $f''_{xy}(x,y)=-16xy=f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y)=12y^2-8x^2$; **b)** $f'_x(x,y)=\frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}}$, $f'_y(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}}$, $f''_{xx}(x,y)=-\frac{y^2}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f''_{xy}(x,y)=\frac{xy}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}=f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y)=-\frac{x^2}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; **c)** $f'_x(x,y)=e^{xe^y+y}$, $f'_y(x,y)=xe^{xe^y+y}$, $f''_{xx}(x,y)=e^{xe^y+2y}$, $f''_{xy}(x,y)=(xe^y+1)e^{xe^y+y}=f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y)=x(xe^y+1)e^{xe^y+y}$; **d)** $f'_x(x,y)=\frac{y}{x}$, $f'_y(x,y)=\ln x$, $f''_{xx}(x,y)=-\frac{y}{x^2}$, $f''_{xy}(x,y)=\frac{1}{x}=f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y)=0$; **e)** $f'_x(x,y)=\frac{1}{x+y^2}$, $f'_y(x,y)=\frac{2y}{x+y^2}$, $f''_{xx}(x,y)=-\frac{1}{(x+y^2)^2}$, $f''_{xy}(x,y)=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}=f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y)=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$; **f)** $f'_x(x,y)=\frac{1}{x+\ln y}$, $f'_y(x,y)=\frac{1}{y(x+\ln y)}$, $f''_{xx}(x,y)=-\frac{1}{(x+\ln y)^2}$, $f''_{xy}(x,y)=-\frac{1}{y(x+\ln y)^2}=f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y)=-\frac{x+\ln y+1}{y^2(x+\ln y)^2}$; **g)** $f'_x(x,y)=\frac{1}{y^2}$, $f'_y(x,y)=-\frac{2x}{y^3}$, $f''_{xx}(x,y)=0$, $f''_{xy}(x,y)=-\frac{2}{y^3}=f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y)=\frac{6x}{y^4}$; **h)** $f'_x(x,y)=2\sin(4x+2y)$, $f'_y(x,y)=\sin(4x+2y)$, $f''_{xx}(x,y)=8\cos(4x+2y)$, $f''_{xy}(x,y)=4\cos(4x+2y)=f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y)=2\cos(4x+2y)$; **i)** $f'_x(x,y)=\frac{2y}{(x+y)^2}$, $f'_y(x,y)=-\frac{2x}{(x+y)^2}$, $f''_{xx}(x,y)=-\frac{4y}{(x+y)^3}$, $f''_{xy}(x,y)=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}=f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y)=\frac{4x}{(x+y)^3}$; **j)** $f'_x(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $f'_y(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, $f''_{xx}(x,y)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{xy}(x,y)=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; **k)** $f'_x(x,y,z)=3x^2+2$, $f'_y(x,y,z)=2yz^2+3z+3$, $f'_z(x,y,z)=2y^2z+3y$,

$f''_{xx}(x,y,z) = 6x$, $f''_{xy}(x,y,z) = 0 = f''_{yx}(x,y,z)$, $f''_{xz}(x,y,z) = 0 = f''_{zx}(x,y,z)$, $f''_{yy}(x,y,z) = 2z^2$, $f''_{yz}(x,y,z) = 4yz + 3 = f''_{zy}(x,y,z)$, $f''_{zz}(x,y,z) = 2y^2$; **l)** $f'_x(x,y,z) = 3x^2yz$, $f'_y(x,y,z) = x^3z$, $f'_z(x,y,z) = x^3y$, $f''_{xx}(x,y,z) = 6xyz$, $f''_{xy}(x,y,z) = 3x^2z = f''_{yx}(x,y,z)$, $f''_{xz}(x,y,z) = 3x^2y = f''_{zx}(x,y,z)$, $f''_{yy}(x,y,z) = 0$, $f''_{yz}(x,y,z) = x^3 = f''_{zy}(x,y,z)$, $f''_{zz}(x,y,z) = 0$; **m)** $f'_x(x,y,z) = y\cos 2z$, $f'_y(x,y,z) = x\cos 2z$, $f'_z(x,y,z) = -2xy\sin 2z$, $f''_{xx}(x,y,z) = 0$, $f''_{xy}(x,y,z) = \cos 2z = f''_{yx}(x,y,z)$, $f''_{xz}(x,y,z) = -2y\sin 2z = f''_{zx}(x,y,z)$, $f''_{yy}(x,y,z) = 0$, $f''_{yz}(x,y,z) = -2x\sin 2z = f''_{zy}(x,y,z)$, $f''_{zz}(x,y,z) = -4xy\cos 2z$; **n)** $f'_x(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $f'_y(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $f'_z(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $f''_{xx}(x,y,z) = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f''_{xy}(x,y,z) = -\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = f''_{yx}(x,y,z)$, $f''_{xz}(x,y,z) = -\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = f''_{zx}(x,y,z)$, $f''_{yy}(x,y,z) = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f''_{yz}(x,y,z) = -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = f''_{zy}(x,y,z)$, $f''_{zz}(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$; **o)** $f'_x(x,y,z) = ye^{xy-z}$, $f'_y(x,y,z) = xe^{xy-z}$, $f'_z(x,y,z) = -e^{xy-z}$, $f''_{xx}(x,y,z) = y^2e^{xy-z}$, $f''_{xy}(x,y,z) = (1+xy)e^{xy-z} = f''_{yx}(x,y,z)$, $f''_{xz}(x,y,z) = -ye^{xy-z} = f''_{zx}(x,y,z)$, $f''_{yy}(x,y,z) = x^2e^{xy-z}$, $f''_{yz}(x,y,z) = -xe^{xy-z} = f''_{zy}(x,y,z)$, $f''_{zz}(x,y,z) = e^{xy-z}$. **22.** **a)** $f'''_{yxx}(x,y) = 2y^3(2+xy^2)e^{xy^2}$; **b)** $f'''_{yyx}(x,y) = \frac{4x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$; **c)** $f'''_{yyx}(x,y) = -x(2\sin(xy) + xy\cos(xy))$; **d)** $f'''_{zyx}(x,y,z) = \frac{24x^3}{y^3z^4}$; **e)** $f'''_{xyz}(x,y,z) = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$. **23.** **a)** minimum lokalne w punkcie $(1,0)$ równe $f(1,0) = 0$; **b)** brak ekstremów lokalnych; **c)** minimum lokalne w punkcie $(-1,3)$ równe $f(-1,3) = -7$; **d)** brak ekstremów lokalnych; **e)** minimum lokalne w punkcie $(0,-1)$ równe $f(0,-1) = -7$; **f)** maksimum lokalne w punkcie $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ równe $f\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$; **g)** minimum lokalne w punkcie $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$ równe $f\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{13}{3}$; **h)** maksimum lokalne w punkcie $(1,0)$ równe $f(1,0) = 1$; **i)** minimum lokalne w punkcie $(1,1)$ równe $f(1,1) = -1$; **j)** minimum lokalne w punkcie $\left(\frac{27}{2}, 5\right)$ równe $f\left(\frac{27}{2}, 5\right) = -\frac{109}{4}$; **k)** minimum lokalne w punkcie $(8,24)$ równe $f(x,y) = -448$; **l)** maksimum lokalne w punkcie $(-2,-1)$ równe $f(-2,-1) = 28$, minimum lokalne w punkcie $(-2,-1)$ równe $f(-2,-1) = -28$; **m)** minimum lokalne w punkcie $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)$ równe $f\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right) = 3\sqrt[3]{4}$; **n)** minimum lokalne w punkcie $(1,2)$ równe $f(x,y) = 7 - 10\ln 2$; **o)** minimum lokalne w punkcie $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ równe $f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{2}{e}$; **p)** minimum lokalne w punkcie $(4,4)$ równe $f(4,4) = 12$; **q)** minimum lokalne w punkcie $(-1,-2,3)$ równe $f(-1,-2,3) = -14$; **r)** maksimum lokalne w punkcie $(4,-3,6)$ równe $f(4,-3,6) = 61$; **s)** minimum lokalne w punkcie $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$ równe $f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right) = -\frac{7}{3}$; **t)** minimum lokalne w punkcie $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ równe $f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$.

Elementy rachunku całkowego funkcji dwóch i trzech zmiennych

24. Obliczyć następujące całki podwójne $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, jeśli:

$$\textbf{a)}\ f(x,y) = xy,\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 4, 4 \leqslant y \leqslant 12\};$$

$$\textbf{b)}\ f(x,y) = xy(x-y),\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2\};$$

$$\textbf{c)}\ f(x,y) = 1,\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\};$$

$$\textbf{d)}\ f(x,y) = \frac{x}{y},\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : y \leqslant x \leqslant 2y, 2 \leqslant y \leqslant 4\};$$

e) $f(x,y) = x + y$, $(x,y) \in D$, D - trójkąt o wierzchołkach $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$;

f) $f(x,y) = x^2 + y$, $(x,y) \in D$,

D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $y = x$, $y = -x$, $y = 1$;

g) $f(x,y) = x - y$, $(x,y) \in D$,

D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$;

h) $f(x,y) = x + y$, $(x,y) \in D$,

D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$;

i) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in D$,

D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $y = 0$, $y = x$, $x = 1$;

$$\textbf{j)}\ f(x,y) = x^2 + y^2,\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 16\};$$

$$\textbf{k)}\ f(x,y) = e^{x^2+y^2},\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\};$$

$$\textbf{l)}\ f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\};$$

$$\textbf{m)}\ f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\};$$

$$\textbf{n)}\ f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2},\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\};$$

$$\textbf{o)}\ f(x,y)=x+y,\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\};$$

$$\textbf{p)}\ f(x,y)=x-y,\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 9, y\leqslant 0\}.$$

25. Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi o równaniach:

$$\textbf{a)}\ y=2x-x^2,\ \ y=x^2;\qquad \textbf{b)}\ 4y=x^2-4x,\ \ x-y-3=0,$$

26. Obliczyć objętości brył ograniczonej powierzchniami o równaniach:

$$\textbf{a)}\ x+y+z-6=0,\ \ 3x+y-6=0,\ \ 3x+2y-12=0,\ \ y=0,\ \ z=0;$$

$$\textbf{b)}\ 2x+3y+z-6=0,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0;\qquad \textbf{c)}\ z=1+x^2+y^2,\ \ x+y-4=0,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0;$$

$$\textbf{d)}\ z=x^2+y^2,\ \ x=0,\ \ y=2x,\ \ y=1,\ \ z=0;\qquad \textbf{e)}\ z=x^2+y^2,\ \ y=x^2,\ \ y=1,\ \ z=0.$$

27. Obliczyć pole części płaszczyzny $3x+4y+6z-12=0$, której rzutem na płaszczyznę Oxy jest prostokąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$.

28. Obliczyć pole części płaszczyzny $3x+4y-z+5=0$, której rzutem na płaszczyznę Oxy jest kwadrat o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

29. Obliczyć następujące całki potrójne $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, jeśli:

$$\textbf{a)}\ f(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},\ \ (x,y,z)\in V,\ \ V=\{(x,y,z):1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 2, 1\leqslant z\leqslant 2\};$$

$$\textbf{b)}\ f(x,y,z)=\frac{1}{5}(4x^2+4xy+y^2-8x-4y+1),\ \ (x,y,z)\in V,$$
$$V=\{(x,y,z):0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2, 0\leqslant z\leqslant 3\};$$

$$\textbf{c)}\ f(x,y,z)=z,\ \ (x,y,z)\in V,\ \ V=\{(x,y,z):z\leqslant x\leqslant y, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant y\};$$

$$\textbf{d)}\ f(x,y,z)=z,\ \ (x,y,z)\in V,\ \ V=\{(x,y,z):0\leqslant x\leqslant z, z-x\leqslant y\leqslant z+x, 0\leqslant z\leqslant 1\};$$

$$\textbf{e)}\ f(x,y,z)=z,\ \ (x,y,z)\in V,\ \ V=\{(x,y,z):0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x, 0\leqslant z\leqslant x\};$$

$$\textbf{f)}\ f(x,y,z)=\frac{1}{(x+y+z+1)^2},\ \ (x,y,z)\in V,$$

V - obszar określony warunkami $x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0,\ \ z\geqslant 0,\ \ x+y+z\leqslant 1$;

$$\textbf{g)}\ f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2},\ \ (x,y,z)\in V,\ \ V=\{(x,y,z):x^2+y^2\leqslant 16, 0\leqslant z\leqslant 3\};$$

$$\textbf{h)}\ f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\ \ (x,y,z)\in V,\ \ V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=25\}.$$

30. Obliczyć objętość bryły V, jeśli:

$$\textbf{a)}\ V=\{(x,y,z):x^2+y^2=36, -5\leqslant z\leqslant 5\};$$

$$\textbf{b)}\ V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1, z\leqslant 0\};\qquad \textbf{c)}\ V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=49, z\geqslant 0\}.$$

Odpowiedzi. 24. a) 512; **b)** $-\frac{2}{3}$; **c)** $\frac{2}{3}$; **d)** 9; **e)** $\frac{1}{3}$; **f)** $\frac{5}{6}$; **g)** $\frac{2}{3}$; **h)** $\frac{8}{3}$; **i)** $\frac{1}{3}$; **j)** 128π; **k)** πe; **l)** π; **m)** 2π; **n)** $\frac{\pi}{2}\ln 2$; **o)** $\frac{16}{3}$; **p)** 18. **25. a)** $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{8}{3}$. **26. a)** 12; **b)** 6; **c)** $\frac{152}{3}$; **d)** $\frac{13}{96}$; **e)** $\frac{88}{105}$. **27.** $\frac{1}{3}\sqrt{61}$. **28.** $\sqrt{26}$. **29. a)** $3\ln 2$; **b)** $\frac{4}{5}$; **c)** $\frac{1}{24}$; **d)** $\frac{1}{4}$; **e)** $\frac{1}{8}$; **f)** $\frac{3}{4}-\ln 2$; **g)** 128π; **h)** 2500π. **30. a)** 360π; **b)** $\frac{2}{3}\pi$; **c)** $\frac{686}{3}\pi$.

Równania różniczkowe zwyczajne

31. Rozwiązać następujące równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

$$\textbf{a)}\ 2x^2y' = y; \qquad \textbf{b)}\ \sin x\cos y - y'\cos x\sin y = 0; \qquad \textbf{c)}\ e^y(1+x^2)y' - 2x(1+e^y) = 0;$$

$$\textbf{d)}\ y'\sin x = y\ln y; \qquad \textbf{e)}\ (1+x^2)y' - \sqrt{1-y^2}; \qquad \textbf{f)}\ y' = \frac{x}{y}\cdot\frac{1+x}{1+y}.$$

32. Rozwiązać następujące równania różniczkowe jednorodne:

$$\textbf{a)}\ (x+y)y' - y = 0; \qquad \textbf{b)}\ x + y + xy' = 0; \qquad \textbf{c)}\ xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y;$$

$$\textbf{d)}\ x - y\cos\frac{y}{x} + x\cos\frac{y}{x}\cdot y' = 0; \qquad \textbf{e)}\ xy' - y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x}; \qquad \textbf{f)}\ xy' = y(1+\ln y - \ln x).$$

33. Rozwiązać następujące równania różniczkowe zupełne:

$$\textbf{a)}\ (x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0; \qquad \textbf{b)}\ (2x-y)\,dx + (4y-x)\,dy = 0;$$

$$\textbf{c)}\ (y^3+2xy^2)\,dx + (2x^2y+3xy^2)\,dy = 0; \qquad \textbf{d)}\ \left(\frac{1}{y}+x\right)dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0;$$

$$\textbf{e)}\ e^y\,dx - (2y - xe^y)\,dy = 0; \qquad \textbf{f)}\ e^x(1+e^y)\,dx + e^y(1+e^x)\,dy = 0.$$

34. Rozwiązać następujące równania różniczkowe liniowe metodą uzmienniania stałej:

$$\textbf{a)}\ y' - 2xy = x - x^3; \qquad \textbf{b)}\ y' + 2xy = xe^{-x^2}; \qquad \textbf{c)}\ y' + y\operatorname{tg}x = \sin 2x;$$

$$\textbf{d)}\ y' - y\operatorname{tg}x = 2\cos^2 x; \qquad \textbf{e)}\ xy' - 2y = xe^{-\frac{1}{x}}; \qquad \textbf{f)}\ (1+x^2)y' + y = \operatorname{arc\,tg}x.$$

35. Rozwiązać następujące równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach metodą przewidywań:

$$\textbf{a)}\ y' - y = 2e^x; \qquad \textbf{b)}\ y' + y = e^{-x}; \qquad \textbf{c)}\ y' - 6y = -2e^{4x};$$

$$\textbf{d)}\ y' + y = 2x^2 - 2x + 1; \qquad \textbf{e)}\ y' + y = x^3 + x^2 + x + 1; \qquad \textbf{f)}\ y' - y = xe^{2x};$$

$$\textbf{g)}\ y' - y = 5\cos 2x; \qquad \textbf{h)}\ y' - y = \sin x.$$

36. Rozwiązać następujące równania różniczkowe liniowe jednorodne rzędu drugiego o stałych współczynnikach:

$$\textbf{a)}\ y'' - 5y' - 6y = 0; \qquad \textbf{b)}\ y'' + y' - 2y = 0; \qquad \textbf{c)}\ y'' = 0;$$

$$\textbf{d)}\ y'' + 2y' + y = 0; \qquad \textbf{e)}\ y'' + 6y' + 10y = 0; \qquad \textbf{f)}\ y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Odpowiedzi. 31. a) $y = Ce^{-\frac{1}{2x}}$; **b)** $\cos y = C\cos x$; **c)** $1 + e^y = C(1+x^2)$; **d)** $y = e^{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; **e)** $\arcsin y - \operatorname{arc\,tg}x = C$; **f)** $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C$. **32. a)** $y = Ce^{\frac{x}{y}}$; **b)** $x^2 + 2xy = C$; **c)** $\ln(Cx) = -e^{-\frac{y}{x}}$; **d)** $x = Ce^{-\sin\frac{y}{x}}$; **e)** $y = x\arcsin(Cx)$; **f)** $y = xe^{Cx}$. **33. a)** $\frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 = C$; **b)** $x^2 - xy + 2y^2 = C$; **c)** $xy^3 + x^2y^2 = C$; **d)** $\frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 = C$; **e)** $xe^y - y^2 = C$; **f)** $e^x + e^y + e^{x+y} = C$. **34. a)** $y = Ce^{x^2} + \frac{1}{2}x^2$; **b)** $y = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2e^{-x^2}$; **c)** $y = C\cos x - 2\cos^2 x$; **d)** $y = \frac{C}{\cos x} + 2\operatorname{tg}x - \frac{2}{3}\operatorname{tg}x\sin^2 x$; **e)** $y = Cx^2 + x^2e^{-\frac{1}{x}}$; **f)** $y = Ce^{-\operatorname{arc\,tg}x} + \operatorname{arc\,tg}x - 1$. **35. a)** $y = Ce^x + 2xe^x$; **b)** $y = Ce^{-x} + xe^{-x}$; **c)** $y = Ce^{6x} + e^{4x}$; **d)** $y = Ce^{-x} + 2x^2 - 6x + 7$; **e)** $y = Ce^{-x} + x^3 - 2x^2 + 5x - 4$; **f)** $y = Ce^x + (x-1)e^{2x}$; **g)** $y = Ce^x + 2\sin 2x - \cos 2x$; **h)** $y = Ce^x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$. **36. a)** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$; **b)** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$; **c)** $y = C_1 + C_2x$; **d)** $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$; **e)** $y = e^{-3x}(C_1\sin x + C_2\cos x)$; **f)** $y = e^{3x}(C_1\sin 2x + C_2\cos 2x)$.