Matematyka 2 - Ćwiczenia - Literatura podstawowa

[1.] *Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniami. I, II*, Praca zbiorowa pod redakcją L. Siewierskiego, PWN, Warszawa 1979.

[2.] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach. I, II*, PWN, Warszawa 1994.

[3.] M. Lassak, *Matematyka dla studiów technicznych*, WYDAWNICTWO SUPREMUM, Bydgoszcz 2017.

[4.] R. Leitner, W. Matuszewski, Z. Rojek, *Zadania z matematyki wyższej. I, II*, WNT, Warszawa 1994 (I), 1999 (II).

Matematyka 2 - Ćwiczenia - Literatura uzupełniająca

[1.] J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, WNT, Warszawa 1993.

Liczby zespolone

1. Znaleźć część rzeczywistą i część urojoną następujących liczb zespolonych:

a) $(2-3i)(5+4i)$; **b)** $(5+2i)(5-2i)$; **c)** $(1+i)^3-(1-i)^3$; **d)** $(2-i)^3+(1-i)^2$;

e) $\dfrac{3+2i}{4-3i}$; **f)** $\dfrac{1}{i}$; **g)** $\dfrac{(\sqrt{3}+i)(-1+\sqrt{3}i)}{(1+i)^2}$; **h)** $\dfrac{(1-i)^2-i}{(1+i)^2+i}$.

2. Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:

a) 4; **b)** -5; **c)** $6i$; **d)** $-7i$;

e) $1+\sqrt{3}i$; **f)** $1-i$; **g)** $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; **h)** $-\sqrt{3}-i$.

3. Obliczyć:

a) $(2+\sqrt{12}i)^5$; **b)** $(1-\sqrt{3}i)^6$; **c)** $(1+i)^{10}$; **d)** $(1+\sqrt{3}i)^{1997}$;

e) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{12}$; **f)** $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{26}$; **g)** $\left(\dfrac{-1+i}{1+i}\right)^{7}$; **h)** $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$.

4. Obliczyć pierwiastki drugiego stopnia z następujących liczb zespolonych:

a) 1; **b)** -1; **c)** i; **d)** $-i$; **e)** $1-\sqrt{3}i$;

f) $-1+i$; **g)** $-3-4i$; **h)** $8+6i$; **i)** $-15+8i$; **j)** $11-60i$.

5. Rozwiązać następujące równania zespolone:

a) $z^2-2z+10=0$; **b)** $z^2-6z+10=0$; **c)** $z^2+z+1=0$;

d) $z^2-(2+i)z-1+7i=0$; **e)** $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$; **f)** $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$;

g) $z^3+8=0$; **h)** $z^3-27=0$; **i)** $z^4-1=0$; **j)** $z^4+4=0$.

Odpowiedzi. 1. a) $22,\ -7$; **b)** $29,\ 0$; **c)** $0,\ 4$; **d)** $2,\ -13$; **e)** $\frac{6}{25},\ \frac{17}{25}$; **f)** $1,\ \sqrt{3}$; **g)** $-1,\ 0$; **h)** $0,\ -1$. **2. a)** $4(\cos 0+i\sin 0)$; **b)** $5(\cos\pi+i\sin\pi)$; **c)** $6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; **d)** $7\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; **e)** $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; **f)** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; **g)** $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; **h)** $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$. **3. a)** $512-512\sqrt{3}i$; **b)** 64; **c)** $32i$; **d)** $2^{1996}-2^{1996}\sqrt{3}i$; **e)** 1; **f)** i; **g)** $-i$; **h)** $512-512\sqrt{3}i$. **4. a)** $-1,\ 1$; **b)** $-i,\ i$; **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; **d)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; **e)** $-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; **f)** $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right),\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}\right)$; **g)** $-1+2i,\ 1-2i$; **h)** $-3-i,\ 3+i$; **i)** $-1-4i,\ 1+4i$; **j)** $-6+5i,\ 6-5i$. **5. a)** $1-3i,\ 1+3i$; **b)** $3-i,\ 3+i$; **c)** $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; **d)** $3-i,\ -1+2i$; **e)** $2+i,\ 1-3i$; **f)** $1-i,\ \frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$; **g)** $1+\sqrt{3}i,\ -2,\ 1-\sqrt{3}i$; **h)** $3,\ -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$; **i)** $1,\ i,\ -1,\ -i$; **j)** $1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1-i$.

Macierze. Wyznaczniki. Układy równań liniowych

6. Wyznaczyć (o ile istnieją) iloczyny macierzy $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$, jeśli:

$$\textbf{a)}\ A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad \textbf{b)}\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{c)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \textbf{d)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. Obliczyć następujące wyznaczniki:

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \quad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \textbf{c)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \quad \textbf{d)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\textbf{e)}\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \textbf{f)}\ \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \textbf{g)}\ \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\textbf{h)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \textbf{i)}\ \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \textbf{j)}\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

8. Wyznaczyć macierze odwrotne do następujących macierzy:

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{c)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \textbf{d)}\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \textbf{e)}\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

9. Wyznaczyć macierze X spełniające następujące równania:

$$\textbf{a)}\ X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}; \quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{c)}\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

10. Wyznaczyć rzędy następujących macierzy:

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}; \quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}; \quad \textbf{c)}\ \begin{bmatrix} 4 & -8 & -4 & 12 & 18 \\ 3 & -6 & -3 & 9 & 12 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{d)}\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \textbf{e)}\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}; \quad \textbf{f)}\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{g)}\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \textbf{h)}\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{i)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \textbf{j)}\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

11. Rozwiązać następujące układy równań liniowych:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 5y & = & 5 \\ x & - & 2y & = & 9 \end{array}\right.$; **b)** $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 10 \\ 5x & - & 10y & = & 25 \end{array}\right.$; **c)** $\left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & - & 4y & = & 5 \\ 9x & - & 6y & = & 2 \end{array}\right.$;

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 14 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 11 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 11 \end{array}\right.$; **e)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 3y & - & z & = & 2 \end{array}\right.$;

f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & - & 8z & = & 8 \\ 4x & + & 3y & - & 9z & = & 9 \\ 2x & + & 3y & - & 5z & = & 7 \\ x & + & 8y & - & 7z & = & 12 \end{array}\right.$; **g)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & - & 6y & + & 2z & + & 3t & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & 5z & + & 7t & = & 1 \\ 2x & - & 3y & - & 11z & - & 15t & = & 1 \end{array}\right.$;

h) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 5y & + & 2z & + & 4t & = & 2 \\ 7x & - & 4y & + & z & + & 3t & = & 5 \\ 5x & + & 7y & - & 4z & - & 6t & = & 3 \end{array}\right.$; **i)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4t & = & 2 \\ 6x & + & 4y & + & 4z & + & 3t & = & 3 \\ 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2t & = & 4 \end{array}\right.$;

j) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & 3z & - & 2t & + & 3u & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 4z & - & t & + & 3u & = & 2 \\ 3x & + & 3y & + & 5z & - & 2t & + & 3u & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 8z & - & 3t & + & 9u & = & 2 \end{array}\right.$;

k) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 6x & + & 4y & + & 5z & + & 2t & + & 3u & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & + & t & + & 2u & = & 3 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & + & t & & & = & -7 \\ 9x & + & 6y & + & z & + & 3t & + & 2u & = & 2 \end{array}\right.$;

l) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & + & u & = & 4 \\ 3x & + & 6y & + & 5z & - & 4t & + & 3u & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 7z & - & 4t & + & u & = & 11 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & - & 3t & + & 3u & = & 6 \end{array}\right.$;

m) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 3y & = & 0 \end{array}\right.$; **n)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$;

o) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 6y & = & 0 \\ 6x & - & 9y & = & 0 \end{array}\right.$; **p)** $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & - & 5y & = & 0 \end{array}\right.$;

q) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 12y & + & 6z & = & 0 \\ 5x & - & 30y & + & 15z & = & 0 \end{array}\right.$; **r)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 6y & + & 10z & = & 0 \\ 6x & - & 9y & - & 15z & = & 0 \end{array}\right.$;

s) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 0 \\ 5x & - & 10y & = & 0 \\ 3x & + & 5y & = & 0 \end{array}\right.$; **t)** $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 6y & = & 0 \\ 6x & - & 9y & = & 0 \\ 2x & - & 3y & = & 0 \end{array}\right.$.

Odpowiedzi. **6.** **a)** $A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} 29 & -22 \\ 31 & -24 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 29 & 31 \\ -22 & -24 \end{bmatrix}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$; **b)** $A \cdot B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; **c)** $B \cdot A = \begin{bmatrix} 26 & 39 & 7 \\ 11 & 16 & 3 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 26 & 11 \\ 39 & 16 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$; **d)** $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 38 & 36 \end{bmatrix}$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 5 \\ 22 & 25 & 19 \\ 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 10 & 22 & 6 \\ 15 & 25 & 10 \\ 5 & 19 & 2 \end{bmatrix}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 38 \\ 7 & 36 \end{bmatrix}$. **7.** **a)** 5; **b)** 5; **c)** 1; **d)** 1; **e)** -10; **f)** -60; **g)** 14; **h)** 8; **i)** 24; **j)** 1000. **8.** **a)** $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$; **e)** $\begin{bmatrix} \frac{19}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{11}{4} \\ -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{11}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$. **9.** **a)** $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 8 & \frac{13}{3} \\ -10 & -5 \end{bmatrix}$.

10. **a)** 2; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 2; **e)** 1; **f)** 1; **g)** 2; **h)** 2; **i)** 4; **j)** 3.

11. **a)** $x = 5$, $y = -2$; **b)** $x = 5 + 2t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$; **c)** układ sprzeczny; **d)** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; **e)** $x = \frac{1}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$, $z = 0$; **f)** $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$; **g)** $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{16}u_2$, $y = u_1$, $z = -\frac{11}{8}u_2$, $t = u_2$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$; **h)** układ sprzeczny; **i)** $x = \frac{7}{18} + \frac{1}{18}u$, $y = 0$, $z = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}u$, $t = u$, $u \in \mathbb{R}$; **j)** układ sprzeczny; **k)** $x = w_1$, $y = w_2$, $z = 13$, $t = 19 - 3w_1 - 2w_2$, $u = -34$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$; **l)** $x = -\frac{9}{2} - 2w_1 - w_2$, $y = w_1$, $z = w_2$, $t = -\frac{7}{2} + 2w_2$, $u = \frac{3}{2} + 2w_2$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$; **m)** $x = \frac{3}{4}t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$; **n)** $x = -\frac{5}{2}t_1 + 2t_2$, $y = t_1$, $z = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$; **o)** $x = \frac{3}{2}t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$; **p)** $x = 0$, $y = 0$; **q)** $x = 6t_1 - 3t_2$, $y = t_1$, $z = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$; **r)** $x = \frac{3}{2}t$, $y = t$, $z = 0$, $t \in \mathbb{R}$; **s)** $x = 0$, $y = 0$; **t)** $x = \frac{3}{2}t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Rachunek wektorowy w $\mathbb{R}^3$

12. Obliczyć cosinus i moduł sinusa kąta φ między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

a) $\vec{u} = [1, -2, 2]$, $\vec{v} = [2, 1, -2]$; **b)** $\vec{u} = [-1, 0, 3]$, $\vec{v} = [6, 7, 2]$; **c)** $\vec{u} = [-1, 0, 3]$, $\vec{v} = [3, 0, -9]$.

13. Obliczyć pole równoległoboku opartego na wektorach $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, jeśli $A = (2, 3, -6)$, $B = (6, 4, 4)$, $C = (3, 7, 4)$.

14. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (-1, 0, -1)$, $B = (0, 2, -3)$ i $C = (4, 4, 1)$.

15. Zbadać, czy punkty $P = (0, 0, 3)$, $R = (-1, 2, 4)$ i $S = (2, -4, 1)$ leżą na jednej prostej.

16. Obliczyć objętość równoległościanu opartego na wektorach $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$, jeśli $A = (3, 4, 3)$, $B = (9, 5, -1)$, $C = (1, 7, 0)$, $D = (3, 2, 5)$.

17. Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach $A = (3, 1, 1)$, $B = (1, 4, 1)$, $C = (1, 1, 7)$ i $D = (3, 4, 9)$.

18. Objętość czworościanu $ABCD$ o trzech danych wierzchołkach $A = (2, 0, -1)$, $B = (3, -1, 1)$ i $C = (2, -2, 3)$ jest równa 5. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka D wiedząc, że leży on na osi Oy.

19. Zbadać, czy punkty $P = (0, 3, 4)$, $R = (-1, 2, 2)$, $S = (2, 0, 3)$ i $T = (-1, 1, 1)$ leżą na jednej płaszczyźnie.

Odpowiedzi. **12.** **a)** $-\frac{4}{9}$, $\frac{\sqrt{65}}{9}$; **b)** 0, 1; **c)** -1, 0. **13.** 45. **14.** 9. **15.** Tak. **16.** 12. **17.** 2. **18.** $(0, -8, 0)$ lub $(0, 7, 0)$. **19.** Tak.

Elementy rachunku różniczkowego funkcji dwóch zmiennych

20. Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego następujących funkcji:

a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$; **b)** $f(x, y) = \sqrt{2xy + y^2}$; **c)** $f(x, y) = e^{xe^y}$;

d) $f(x, y) = y \ln x$; **e)** $f(x, y) = \ln(x + y^2)$; **f)** $f(x, y) = \ln(x + \ln y)$;

g) $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$; **h)** $f(x, y) = \sin^2(2x + y)$; **i)** $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$; **j)** $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$.

21. Wyznaczyć wskazane pochodne cząstkowe następujących funkcji:

a) $f(x, y) = e^{xy^2}$, f'''_{yxx}; **b)** $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, f'''_{yyx}; **c)** $f(x, y) = \sin(xy)$, f'''_{yyx}.

22. Wyznaczyć ekstrema lokalne następujących funkcji:

a) $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$; **b)** $f(x, y) = (x - 1)^2 - 2y^2$;

c) $f(x, y) = (x + y)^2 - xy - x - 5y$; **d)** $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1$;

e) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - x + 4y - 5$; **f)** $f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 - 3x + 2y - 1$;

g) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 4y + 5$; **h)** $f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 + 2x - y$;

i) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$; **j)** $f(x, y) = y^3 + x^2 - 6xy + 3x + 6y$;

k) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 48x$; **l)** $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

m) $f(x, y) = 4xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; **n)** $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$;

o) $f(x, y) = (4x + y^2)e^{2x}$; **p)** $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

Odpowiedzi. **20.** **a)** $f'_x(x, y) = 4x^3 - 8xy^2$, $f'_y(x, y) = 4y^3 - 8x^2y$, $f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 8y^2$, $f''_{xy}(x, y) = -16xy = f''_{yx}(x, y)$, $f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 8x^2$; **b)** $f'_x(x, y) = \frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}}$, $f'_y(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}}$,

$f''_{xx}(x,y) = -\frac{y^2}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f''_{xy}(x,y) = \frac{xy}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = -\frac{x^2}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; **c)** $f'_x(x,y) = e^{xe^y+y}$, $f'_y(x,y) = xe^{xe^y+y}$, $f''_{xx}(x,y) = e^{xe^y+2y}$, $f''_{xy}(x,y) = (xe^y+1)e^{xe^y+y} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = x(xe^y+1)e^{xe^y+y}$; **d)** $f'_x(x,y) = \frac{y}{x}$, $f'_y(x,y) = \ln x$, $f''_{xx}(x,y) = -\frac{y}{x^2}$, $f''_{xy}(x,y) = \frac{1}{x} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = 0$; **e)** $f'_x(x,y) = \frac{1}{x+y^2}$, $f'_y(x,y) = \frac{2y}{x+y^2}$, $f''_{xx}(x,y) = -\frac{1}{(x+y^2)^2}$, $f''_{xy}(x,y) = -\frac{2y}{(x+y^2)^2} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$; **f)** $f'_x(x,y) = \frac{1}{x+\ln y}$, $f'_y(x,y) = \frac{1}{y(x+\ln y)}$, $f''_{xx}(x,y) = -\frac{1}{(x+\ln y)^2}$, $f''_{xy}(x,y) = -\frac{1}{y(x+\ln y)^2} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = -\frac{x+\ln y+1}{y^2(x+\ln y)^2}$; **g)** $f'_x(x,y) = \frac{1}{y^2}$, $f'_y(x,y) = -\frac{2x}{y^3}$, $f''_{xx}(x,y) = 0$, $f''_{xy}(x,y) = -\frac{2}{y^3} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = \frac{6x}{y^4}$; **h)** $f'_x(x,y) = 2\sin(4x+2y)$, $f'_y(x,y) = \sin(4x+2y)$, $f''_{xx}(x,y) = 8\cos(4x+2y)$, $f''_{xy}(x,y) = 4\cos(4x+2y) = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = 2\cos(4x+2y)$; **i)** $f'_x(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2}$, $f'_y(x,y) = -\frac{2x}{(x+y)^2}$, $f''_{xx}(x,y) = -\frac{4y}{(x+y)^3}$, $f''_{xy}(x,y) = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = \frac{4x}{(x+y)^3}$; **j)** $f'_x(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $f'_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $f''_{xx}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{xy}(x,y) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. **21.** **a)** $f'''_{yxx}(x,y) = 2y^3(2+xy^2)e^{xy^2}$; **b)** $f'''_{yyx}(x,y) = \frac{4x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$; **c)** $f'''_{yyx}(x,y) = -x(2\sin(xy) + xy\cos(xy))$. **22.** **a)** minimum lokalne w punkcie $(1,0)$ równe $f(1,0) = 0$; **b)** brak ekstremów lokalnych; **c)** minimum lokalne w punkcie $(-1,3)$ równe $f(-1,3) = -7$; **d)** brak ekstremów lokalnych; **e)** minimum lokalne w punkcie $(0,-1)$ równe $f(0,-1) = -7$; **f)** maksimum lokalne w punkcie $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ równe $f\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$; **g)** minimum lokalne w punkcie $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$ równe $f\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{13}{3}$; **h)** maksimum lokalne w punkcie $(1,0)$ równe $f(1,0) = 1$; **i)** minimum lokalne w punkcie $(1,1)$ równe $f(1,1) = -1$; **j)** minimum lokalne w punkcie $\left(\frac{27}{2}, 5\right)$ równe $f\left(\frac{27}{2}, 5\right) = -\frac{109}{4}$; **k)** minimum lokalne w punkcie $(8,24)$ równe $f(x,y) = -448$; **l)** maksimum lokalne w punkcie $(-2,-1)$ równe $f(-2,-1) = 28$, minimum lokalne w punkcie $(-2,-1)$ równe $f(-2,-1) = -28$; **m)** minimum lokalne w punkcie $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)$ równe $f\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right) = 3\sqrt[3]{4}$; **n)** minimum lokalne w punkcie $(1,2)$ równe $f(x,y) = 7 - 10\ln 2$; **o)** minimum lokalne w punkcie $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ równe $f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{2}{e}$; **p)** minimum lokalne w punkcie $(4,4)$ równe $f(4,4) = 12$.

Elementy rachunku całkowego funkcji dwóch zmiennych

23. Obliczyć następujące całki podwójne $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, jeśli:

$$\textbf{a)}\ f(x,y) = xy,\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 4, 4 \leqslant y \leqslant 12\};$$

$$\textbf{b)}\ f(x,y) = xy(x-y),\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2\};$$

$$\textbf{c)}\ f(x,y) = 1,\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\};$$

$$\textbf{d)}\ f(x,y) = \frac{x}{y},\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : y \leqslant x \leqslant 2y, 2 \leqslant y \leqslant 4\};$$

e) $f(x,y) = x+y$, $(x,y) \in D$, D - trójkąt o wierzchołkach $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$;

f) $f(x,y) = x^2 + y$, $(x,y) \in D$,

D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $y = x$, $y = -x$, $y = 1$;

g) $f(x,y) = x - y$, $(x,y) \in D$,

D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$;

h) $f(x,y) = x + y$, $(x,y) \in D$,

D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$;

i) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in D$,

D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $y = 0$, $y = x$, $x = 1$;

$$\textbf{j)}\ f(x,y) = x^2 + y^2,\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 16\};$$

$$\textbf{k)}\ f(x,y) = e^{x^2+y^2},\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\};$$

$$\textbf{l)}\ f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\};$$

$$\textbf{m)}\ f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\};$$

n) $f(x,y)=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$, $(x,y)\in D$, $D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\}$;

o) $f(x,y)=x+y$, $(x,y)\in D$, $D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$;

p) $f(x,y)=x-y$, $(x,y)\in D$, $D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 9, y\leqslant 0\}$.

24. Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi o równaniach:

a) $y=2x-x^2$, $y=x^2$; **b**) $4y=x^2-4x$, $x-y-3=0$,

25. Obliczyć objętości brył ograniczonej powierzchniami o równaniach:

a) $x+y+z-6=0$, $3x+y-6=0$, $3x+2y-12=0$, $y=0$, $z=0$;

b) $2x+3y+z-6=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$; **c**) $z=1+x^2+y^2$, $x+y-4=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

d) $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=2x$, $y=1$, $z=0$; **e**) $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

26. Obliczyć pole części płaszczyzny $3x+4y+6z-12=0$, której rzutem na płaszczyznę Oxy jest prostokąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$.

27. Obliczyć pole części płaszczyzny $3x+4y-z+5=0$, której rzutem na płaszczyznę Oxy jest kwadrat o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Odpowiedzi. 23. a) 512; **b)** $-\frac{2}{3}$; **c)** $\frac{2}{3}$; **d)** 9; **e)** $\frac{1}{3}$; **f)** $\frac{5}{6}$; **g)** $\frac{2}{3}$; **h)** $\frac{8}{3}$; **i)** $\frac{1}{3}$; **j)** 128π; **k)** πe; **l)** π; **m)** 2π; **n)** $\frac{\pi}{2}\ln 2$; **o)** $\frac{16}{3}$; **p)** 18. **24. a)** $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{8}{3}$. **25. a)** 12; **b)** 6; **c)** $\frac{152}{3}$; **d)** $\frac{13}{96}$; **e)** $\frac{88}{105}$. **26.** $\frac{1}{3}\sqrt{61}$. **27.** $\sqrt{26}$.

Równania różniczkowe zwyczajne

28. Rozwiązać następujące równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

a) $2x^2y'=y$; **b**) $\sin x\cos y-y'\cos x\sin y=0$; **c**) $e^y(1+x^2)y'-2x(1+e^y)=0$;

d) $y'\sin x=y\ln y$; **e**) $(1+x^2)y'-\sqrt{1-y^2}$; **f**) $y'=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1+x}{1+y}$.

29. Rozwiązać następujące równania różniczkowe jednorodne:

a) $(x+y)y'-y=0$; **b**) $x+y+xy'=0$; **c**) $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y$;

d) $x-y\cos\dfrac{y}{x}+x\cos\dfrac{y}{x}\cdot y'=0$; **e**) $xy'-y=x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$; **f**) $xy'=y(1+\ln y-\ln x)$.

30. Rozwiązać następujące równania różniczkowe zupełne:

a) $(x+y)\,dx+(x-y)\,dy=0$; **b**) $(2x-y)\,dx+(4y-x)\,dy=0$;

c) $(y^3+2xy^2)\,dx+(2x^2y+3xy^2)\,dy=0$; **d**) $\left(\dfrac{1}{y}+x\right)dx-\dfrac{x}{y^2}\,dy=0$;

e) $e^y\,dx-(2y-xe^y)\,dy=0$; **f**) $e^x(1+e^y)\,dx+e^y(1+e^x)\,dy=0$.

31. Rozwiązać następujące równania różniczkowe liniowe metodą uzmienniania stałej:

a) $y'-2xy=x-x^3$; **b**) $y'+2xy=xe^{-x^2}$; **c**) $y'+y\operatorname{tg}x=\sin 2x$;

d) $y'-y\operatorname{tg}x=2\cos^2 x$; **e**) $xy'-2y=xe^{-\frac{1}{x}}$; **f**) $(1+x^2)y'+y=\operatorname{arc\,tg}x$.

32. Rozwiązać następujące równania różniczkowe liniowe jednorodne rzędu drugiego o stałych współczynnikach:

a) $y''-5y'-6y=0$; **b**) $y''+y'-2y=0$; **c**) $y''=0$;

d) $y''+2y'+y=0$; **e**) $y''+6y'+10y=0$; **f**) $y''-6y'+13y=0$.

Odpowiedzi. 28. a) $y=Ce^{-\frac{1}{2x}}$; **b)** $\cos y=C\cos x$; **c)** $1+e^y=C(1+x^2)$; **d)** $y=e^{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; **e)** $\arcsin y-\operatorname{arc\,tg}x=C$; **f)** $\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+C$. **29. a)** $y=Ce^{\frac{x}{y}}$; **b)** $x^2+2xy=C$; **c)** $\ln(Cx)=-e^{-\frac{y}{x}}$; **d)** $x=Ce^{-\sin\frac{y}{x}}$; **e)** $y=x\arcsin(Cx)$; **f)** $y=xe^{Cx}$. **30. a)** $\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2=C$; **b)** $x^2-xy+2y^2=C$; **c)** $xy^3+x^2y^2=C$; **d)** $\frac{x}{y}+\frac{1}{2}x^2=C$; **e)** $xe^y-y^2=C$; **f)** $e^x+e^y+e^{x+y}=C$. **31. a)** $y=Ce^{x^2}+\frac{1}{2}x^2$; **b)** $y=Ce^{-x^2}+\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}$; **c)** $y=C\cos x-2\cos^2 x$; **d)** $y=\frac{C}{\cos x}+2\operatorname{tg}x-\frac{2}{3}\operatorname{tg}x\sin^2 x$; **e)** $y=Cx^2+x^2e^{-\frac{1}{x}}$; **f)** $y=Ce^{-\operatorname{arc\,tg}x}+\operatorname{arc\,tg}x-1$. **32. a)** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$; **b)** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$; **c)** $y=C_1+C_2x$; **d)** $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$; **e)** $y=e^{-3x}(C_1\sin x+C_2\cos x)$; **f)** $y=e^{3x}(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)$.