Literatura do ćwiczeń z matematyki

[1]* *Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniami. I, II*, Praca zbiorowa pod redakcją L. Siewierskiego, PWN, Warszawa 1979.

[2] E. Kącki, D. Sadowska, L. Siewierski, *Geometria analityczna w zadaniach*, PWN, Warszawa 1975.

[3]** W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach. I, II*, PWN, Warszawa 1994.

[4] R. Leitner, W. Matuszewski, Z. Rojek, *Zadania z matematyki wyższej. I, II*, WNT, Warszawa 1994 (I), 1999 (II).

[5] A. Ostasiewicz, Z. Rusnak, U. Siedlecka, *Statystyka. Elementy teorii i zadania*, Wydawnictwo AE we Wrocławiu, Wrocław 2001.

[6]* J. Sikorska, *Zbiór zadań z matematyki dla studentów chemii*, Skrypty Uniwersytetu Śląskiego nr 586, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2002.

[7] G.I. Zaporożec, *Metody rozwiązywania zadań z analizy matematycznej*, WNT, Warszawa 1976.

Wektory w $\mathbb{R}^3$

1. Obliczyć cosinus i moduł sinusa kąta φ między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

a) $\vec{u} = [1, -2, 2]$, $\vec{v} = [2, 1, -2]$; **b)** $\vec{u} = [-1, 0, 3]$, $\vec{v} = [6, 7, 2]$; **c)** $\vec{u} = [-1, 0, 3]$, $\vec{v} = [3, 0, -9]$.

2. Obliczyć pole równoległoboku opartego na wektorach $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, jeśli $A = (2, 3, -6)$, $B = (6, 4, 4)$, $C = (3, 7, 4)$.

3. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (-1, 0, -1)$, $B = (0, 2, -3)$ i $C = (4, 4, 1)$.

4. Zbadać, czy punkty $P = (0, 0, 3)$, $R = (-1, 2, 4)$ i $S = (2, -4, 1)$ leżą na jednej prostej.

5. Obliczyć objętość równoległościanu opartego na wektorach $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$, jeśli $A = (3, 4, 3)$, $B = (9, 5, -1)$, $C = (1, 7, 0)$, $D = (3, 2, 5)$.

6. Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach $A = (3, 1, 1)$, $B = (1, 4, 1)$, $C = (1, 1, 7)$ i $D = (3, 4, 9)$.

7. Objętość czworościanu $ABCD$ o trzech danych wierzchołkach $A = (2, 0, -1)$, $B = (3, -1, 1)$ i $C = (2, -2, 3)$ jest równa 5. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka D wiedząc, że leży on na osi Oy.

8. Zbadać, czy punkty $P = (0, 3, 4)$, $R = (-1, 2, 2)$, $S = (2, 0, 3)$ i $T = (-1, 1, 1)$ leżą na jednej płaszczyźnie.

Odpowiedzi. 1. a) $-\frac{4}{9}$, $\frac{\sqrt{65}}{9}$; **b)** 0, 1; **c)** -1, 0. **2.** 45. **3.** 9. **4.** Tak. **5.** 12. **6.** 2. **7.** $(0, -8, 0)$ lub $(0, 7, 0)$. **8.** Tak.

Prosta w $\mathbb{R}^2$

9. Napisać równanie prostej l:
a) przechodzącej przez punkty $P = (1, 0)$ i $R = (-7, 1)$;
b) przechodzącej przez punkt $P = (-1, 3)$ i prostopadłej do wektora $\vec{n} = [3, -2]$;
c) przechodzącej przez punkt $P = (-1, 5)$ i równoległej do prostej $l_1 : 3x - y + 10 = 0$;
d) przechodzącej przez punkt $P = (1, -3)$ i prostopadłej do prostej $l_1 : x - 2y + 5 = 0$.

10. Wyznaczyć punkt przecięcia prostych $l_1 : 4x + 7y - 15 = 0$ i $l_2 : 9x - 14y - 4 = 0$.

11. Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu $P = (-1, -3)$ względem prostej $l : x + 2y - 2 = 0$.

Odpowiedzi. 9. a) $x + 8y - 1 = 0$; **b)** $3x - 2y + 9 = 0$; **c)** $x - 2y + 11 = 0$; **d)** $2x + y + 1 = 0$. **10.** $(2, 1)$. **11.** $P = (\frac{13}{5}, \frac{21}{5})$.

Płaszczyzna i prosta w $\mathbb{R}^3$

12. Napisać równanie płaszczyzny π:
a) przechodzącej przez punkt $P = (1, -1, 3)$ i prostopadłej do wektora $\vec{n} = [5, 2, 1]$;
b) przechodzącej przez punkt $P = (-2, 7, 3)$ i równoległej do płaszczyzny $\pi_1 : x - 4y + 5z + 1 = 0$;
c) przechodzącej przez punkty $P = (1, 2, -1)$, $R = (-2, -1, 5)$ i $S = (2, 2, 2)$.

13. Dane są punkty $P = (1, 3, -2)$ i $R = (7, -4, 4)$. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt R i prostopadłej do odcinka PR.

14. Wyznaczyć wspólny punkt trzech płaszczyzn $\pi_1 : 5x + 8y - z - 7 = 0$, $\pi_2 : x + 2y + 3z - 1 = 0$ i $\pi_3 : 2x - 3y + 2z - 9 = 0$.

15. Napisać równania parametryczne, zwyczajne i krawędziowe prostej l:
a) przechodzącej przez punkt $P = (-3, 2, 1)$ i równoległej do wektora $\vec{u} = [-6, 1, 4]$;

b) przechodzącej przez punkty $P=(3,6,8)$ i $R=(-1,4,3)$;
c) przechodzącej przez punkt $P=(2,1,-2)$ i równoległej do prostej $l_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{2}$;
d) przechodzącej przez punkt $P=(3,-2,4)$ i prostopadłej do płaszczyzny $\pi: 5x+3y-7z+1=0$.

16. Prostą $l: \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & 3y & - & 3z & - & 9 & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & + & 3 & = & 0 \end{array}\right.$ sprowadzić do postaci parametrycznej i zwyczajnej.

17. Wyznaczyć punkt przecięcia prostych $l_1:\frac{x-1}{2}=y-7=\frac{z-5}{4}$ i $l_2:\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=z$.

18. Wyznaczyć punkt przecięcia prostej $l:\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=z-1$ z płaszczyzną $\pi: 3x+5y+z+2=0$.

19. Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu $P=(4,-3,1)$ względem płaszczyzny $\pi: x+2y-z-3=0$.

20. Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu $P=(1,-2,1)$ względem prostej $l: x+1=\frac{y+8}{-1}=\frac{z-2}{2}$.

Odpowiedzi. 12. a) $5x+2y+z-6=0$; **b)** $x-4y+5z+15=0$; **c)** $3x-5y-z+6=0$. **13.** $6x-7y+6z-94=0$. **14.** $(3,-1,0)$. **15. a)** $\left\{\begin{array}{l} x=-6t-3 \\ y=t+2 \\ z=4t+1 \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$; $\frac{x+3}{-6}=y-2=\frac{z-1}{4}$; $\left\{\begin{array}{l} x+6y-9=0 \\ 4y-z-7=0 \end{array}\right.$; **b)** $\left\{\begin{array}{l} x=4t-1 \\ y=2t+4 \\ z=5t+3 \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$; $\frac{x+1}{4}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-3}{5}$; $\left\{\begin{array}{l} x-2y+9=0 \\ 5y-2z-14=0 \end{array}\right.$; **c)** $\left\{\begin{array}{l} x=2t+2 \\ y=3t-2 \\ z=2t-2 \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$; $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{2}$; $\left\{\begin{array}{l} 3x-2y-4=0 \\ 2y-3z-8=0 \end{array}\right.$; **d)** $\left\{\begin{array}{l} x=5t+3 \\ y=3t-2 \\ z=-7t+4 \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$; $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$; $\left\{\begin{array}{l} 3x-5y-19=0 \\ 7y+3z+2=0 \end{array}\right.$. **16.** $\left\{\begin{array}{l} x=9t+27 \\ y=5t+15 \\ z=t \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$; $\frac{x-27}{9}=\frac{y-15}{5}=z$. **17.** $(-3,5,-3)$. **18.** $(0,0-2)$. **19.** $(6,1,-1)$. **20.** $(-5,-12,-1)$.

Elementy rachunku całkowego funkcji wielu zmiennych

21. Obliczyć następujące całki podwójne $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, jeśli:

a) $f(x,y)=xy,\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant 4, 4\leqslant y\leqslant 12\}$;

b) $f(x,y)=xy(x-y),\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\}$;

c) $f(x,y)=1,\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\}$;

d) $f(x,y)=\dfrac{x}{y},\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y): y\leqslant x\leqslant 2y, 2\leqslant y\leqslant 4\}$;

e) $f(x,y)=x+y,\ \ (x,y)\in D,\ \ D$ - trójkąt o wierzchołkach $A=(0,0),\ B=(1,0),\ C=(0,1)$;

f) $f(x,y)=x^2+y,\ \ (x,y)\in D$,
D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $y=x,\ y=-x,\ y=1$;

g) $f(x,y)=x-y,\ \ (x,y)\in D$,
D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $y=0,\ y=x,\ x+y=2$;

h) $f(x,y)=x+y,\ \ (x,y)\in D$,
D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $x=0,\ y=0,\ x+y=2$;

i) $f(x,y)=x^2+y^2,\ \ (x,y)\in D$,
D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $y=0,\ y=x,\ x=1$;

j) $f(x,y)=x^2+y^2,\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 16\}$;

k) $f(x,y)=e^{x^2+y^2},\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1\}$;

l) $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\}$;

m) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y): 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$;

n) $f(x,y)=\dfrac{1}{1+x^2+y^2},\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\}$;

o) $f(x,y)=x+y,\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$;

p) $f(x,y)=x-y,\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 9, y\leqslant 0\}$.

22. Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi o równaniach:

a) $y=2x-x^2,\ \ y=x^2$; **b**) $4y=x^2-4x,\ \ x-y-3=0$,

23. Obliczyć objętości brył ograniczonej powierzchniami o równaniach:

a) $x+y+z-6=0,\ \ 3x+y-6=0,\ \ 3x+2y-12=0,\ \ y=0,\ \ z=0$;

b) $2x+3y+z-6=0,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$; **c**) $z=1+x^2+y^2,\ \ x+y-4=0,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$;

d) $z=x^2+y^2,\ \ x=0,\ \ y=2x,\ \ y=1,\ \ z=0$; **e**) $z=x^2+y^2,\ \ y=x^2,\ \ y=1,\ \ z=0$.

24. Obliczyć pole części płaszczyzny $3x+4y+6z-12=0$, której rzutem na płaszczyznę Oxy jest prostokąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$.

25. Obliczyć pole części płaszczyzny $3x+4y-z+5=0$, której rzutem na płaszczyznę Oxy jest kwadrat o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Odpowiedzi. 21. a) 512; **b)** $-\frac{2}{3}$; **c)** $\frac{2}{3}$; **d)** 9; **e)** $\frac{1}{3}$; **f)** $\frac{5}{6}$; **g)** $\frac{2}{3}$; **h)** $\frac{8}{3}$; **i)** $\frac{1}{3}$; **j)** 128π; **k)** πe; **l)** π; **m)** 2π; **n)** $\frac{\pi}{2}\ln 2$; **o)** $\frac{16}{3}$; **p)** 18. **22. a)** $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{8}{3}$. **23. a)** 12; **b)** 6; **c)** $\frac{152}{3}$; **d)** $\frac{13}{96}$; **e)** $\frac{88}{105}$. **24.** $\frac{1}{3}\sqrt{61}$. **25.** $\sqrt{26}$.

Całka potrójna

26. Obliczyć następujące całki potrójne $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, jeśli:

a) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z},\ \ (x,y,z)\in V,\ \ V=\{(x,y,z): 1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 2, 1\leqslant z\leqslant 2\}$;

b) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{5}(4x^2+4xy+y^2-8x-4y+1),\ \ (x,y,z)\in V,$

$V=\{(x,y,z): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2, 0\leqslant z\leqslant 3\}$;

c) $f(x,y,z)=z,\ \ (x,y,z)\in V,\ \ V=\{(x,y,z): z\leqslant x\leqslant y, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant y\}$;

d) $f(x,y,z)=z,\ \ (x,y,z)\in V,\ \ V=\{(x,y,z): 0\leqslant x\leqslant z, z-x\leqslant y\leqslant z+x, 0\leqslant z\leqslant 1\}$;

e) $f(x,y,z)=z,\ \ (x,y,z)\in V,\ \ V=\{(x,y,z): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x, 0\leqslant z\leqslant x\}$;

f) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{(x+y+z+1)^2},\ \ (x,y,z)\in V,$

V - obszar określony warunkami $x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0,\ \ z\geqslant 0,\ \ x+y+z\leqslant 1$;

g) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2},\ \ (x,y,z)\in V,\ \ V=\{(x,y,z): x^2+y^2\leqslant 16, 0\leqslant z\leqslant 3\}$;

h) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\ \ (x,y,z)\in V,\ \ V=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=25\}$.

27. Obliczyć objętość bryły V, jeśli:

a) $V=\{(x,y,z): x^2+y^2=36, -5\leqslant z\leqslant 5\}$;

b) $V=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1, z\leqslant 0\}$; **c**) $V=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=49, z\geqslant 0\}$.

Odpowiedzi. 26. a) $3\ln 2$; **b)** $\frac{4}{5}$; **c)** $\frac{1}{24}$; **d)** $\frac{1}{4}$; **e)** $\frac{1}{8}$; **f)** $\frac{3}{4}-\ln 2$; **g)** 128π; **h)** 2500π. **27. a)** 360π; **b)** $\frac{2}{3}\pi$; **c)** $\frac{686}{3}\pi$.

Teoria pola wektorowego

28. Wykazać, że następujące pola wektorowe ω mają potencjały i je wyznaczyć, jeśli:

a) $\omega(x,y)=[y,x]$; **b**) $\omega(x,y)=[x^2+2xy-y^2, x^2-2xy-y^2]$; **c**) $\omega(x,y)=[\cos x+3x^2y, x^3-y^2]$;

d) $\omega(x,y,z)=[2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z]$; **e**) $\omega(x,y,z)=[3x^2+2y^2+3z, 4xy+2y-z, 3x-y-2]$.

Odpowiedzi. 28. a) $F(x,y)=xy+C$; **b)** $F(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C$; **c)** $F(x,y)=\sin x+x^3y-\frac{1}{3}y^3+C$; **d)** $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+C$; **e)** $F(x,y,z)=x^3+2xy^2+y^2+3xz-yz-2z+C$.

Całki krzywoliniowe

29. Obliczyć całki krzywoliniowe niezorientowane $\int\limits_L f(x,y)\,dl$, jeśli:
a) $f(x,y)=x$, $L=\{(x,y): x=2\cos t, y=2\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$;
b) $f(x,y)=\frac{6y}{x}$, $L=\left\{(x,y): y=\frac{1}{2}x^2, 0\leqslant x\leqslant 1\right\}$;

30. Obliczyć całkę krzywoliniową niezorientowaną $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$, jeśli: $f(x,y,z)=z$, $L=\{(x,y): x=3\cos t, y=3\sin t, z=4t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$.

31. Obliczyć całki krzywoliniowe zorientowane **a)** $\int\limits_L x\,dx+y\,dy$, **b)** $\int\limits_L -y\,dx+x\,dy$ po krzywej $L=\left\{(x,y): x=2\cos t, y=\sin t, 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ skierowanej zgodnie ze wzrostem parametru t.

32. Obliczyć całki krzywoliniowe zorientowane **a)** $\int\limits_L xy\,dx-x^2\,dy$, **b)** $\int\limits_L x^2\,dx+xy\,dy$ po krzywej $L=\left\{(x,y): y=\frac{1}{x}, 1\leqslant x\leqslant 4\right\}$ skierowanej zgodnie ze wzrostem zmiennej x.

33. Obliczyć całki krzywoliniowe zorientowane **a)** $\int\limits_L z\,dx+x\,dy+y\,dz$, **b)** $\int\limits_L y\,dx+z\,dy-x\,dz$ po krzywej $L=\{(x,y,z): x=t^2, y=t^3, z=t, 0\leqslant t\leqslant 1\}$ skierowanej zgodnie ze wzrostem parametru t.

34. Korzystając ze wzoru Greena obliczyć następujące całki krzywoliniowe:
a) $\int\limits_L (x+y)\,dx-2x\,dy$, gdzie L jest dodatnio zorientowanym brzegiem trójkąta o równaniach $x=0$, $y=0$, $x+y=2$;
b) $\int\limits_L 3x^2y^2\,dx+2x^3y\,dy$, gdzie L jest dodatnio zorientowanym brzegiem kwadratu o równaniach boków $x=\pm 4$, $y=\pm 4$;
c) $\int\limits_L y\,dx-(x+y)\,dy$, gdzie L jest dodatnio zorientowaną krzywą zamkniętą złożoną z łuku paraboli $y=x^2$ i odcinka prostej $y=4$;
d) $\int\limits_L (y-x^2y)\,dx+(xy^2+x)\,dy$, gdzie L jest dodatnio zorientowanym brzegiem kwadratu $D=\{(x,y): 1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 2\}$;
e) $\int\limits_L x^2y\,dx-xy^2\,dy$, gdzie L jest dodatnio zorientowanym brzegiem koła $D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 4\}$.

Odpowiedzi. 29. a) 4π; **b)** $2\sqrt{2}-1$; **30.** $40\pi^2$; **31. a)** $-\frac{3}{2}$; **b)** π. **32. a)** 6; **b)** $\frac{81}{4}$. **33. a)** $\frac{91}{60}$; **b)** $\frac{49}{60}$. **34. a)** -6; **b)** 0; **c)** $-\frac{64}{3}$; **d)** $\frac{14}{3}$; **e)** -8π.

Całki powierzchniowe

35. Obliczyć całki powierzchniowe niezorientowane:
a) $\int\limits_S (z-x-y)\,dS$, $S=\{(x,y,z): z=2x+2y, 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$;
b) $\int\limits_S xyz\,dS$, $S=\{(x,y,z): z=1-x-y, 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$;

36. Obliczyć całki powierzchniowe zorientowane:
a) $\int\limits_L yz\,dy\,dz+xz\,dz\,dx+xy\,dx\,dy$, gdzie S jest górną stroną powierzchni trójkąta wyciętego z płaszczyzny $x+y+z=2$ przez płaszczyzny układu współrzędnych $x=0$, $y=0$, $z=0$;
b) $\int\limits_L 4y^2\,dy\,dz+3x\,dz\,dx+2z\,dx\,dy$, gdzie S jest górną stroną płata $z=xy$ dla $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

37. Korzystając z twierdzenia Stokesa obliczyć cyrkulację wektora ω wzdłuż krzywej L, jeśli:
a) $\omega(x,y,z)=[x-2z, x+3y+z, 5x+y]$, L jest dodatnio zorientowanym brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$;
b) $\omega(x,y,z)=[z-y, x-z, y-x]$, L jest dodatnio zorientowanym brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A=(2,0,0)$, $B=(0,2,0)$, $C=(0,0,2)$;
c) $\omega(x,y,z)=[x(y-z), y(x-z), z(y-x)]$, L jest dodatnio zorientowanym brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A=(3,0,0)$, $B=(0,3,0)$, $C=(0,0,3)$.

38. Korzystając z twierdzenia Gaussa obliczyć strumień wektora ω przez powierzchnię S, jeśli:
a) $\omega(x,y,z)=[x,y,z]$, S jest zewnętrzną stroną powierzchni ostrosłupa $V=\{(x,y,z): 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2-x, 0\leqslant z\leqslant 2-x-y\}$;
b) $\omega(x,y,z)=[x^2yz, xy^2z, xyz^2]$, S jest zewnętrzną stroną powierzchni sześcianu $V=\{(x,y,z): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1\}$;
c) $\omega(x,y,z)=[x^2y, x^2z, yz^2]$, S jest zewnętrzną stroną powierzchni prostopadłościanu $V=\{(x,y,z): 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 3, 0\leqslant z\leqslant 4\}$.

Odpowiedzi. 35. a) 3; **b)** $\frac{\sqrt{3}}{20}$; **36. a)** 2; **b)** -8. **37. a)** -3; **b)** 12; **c)** 9. **38. a)** 4; **b)** $\frac{3}{4}$; **c)** 216.

Równania różniczkowe zwyczajne

39. Rozwiązać następujące równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

a) $2x^2y' = y$; **b)** $\sin x \cos y - y' \cos x \sin y = 0$; **c)** $e^y(1+x^2)y' - 2x(1+e^y) = 0$;

d) $y' \sin x = y \ln y$; **e)** $(1+x^2)y' - \sqrt{1-y^2}$; **f)** $y' = \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{1+x}{1+y}$.

40. Rozwiązać następujące równania różniczkowe jednorodne:

a) $(x+y)y' - y = 0$; **b)** $x + y + xy' = 0$; **c)** $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$;

d) $x - y\cos\dfrac{y}{x} + x\cos\dfrac{y}{x} \cdot y' = 0$; **e)** $xy' - y = x \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$; **f)** $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$.

41. Rozwiązać następujące równania różniczkowe zupełne:

a) $(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0$; **b)** $(2x-y)\,dx + (4y-x)\,dy = 0$;

c) $(y^3 + 2xy^2)\,dx + (2x^2y + 3xy^2)\,dy = 0$; **d)** $\left(\dfrac{1}{y} + x\right) dx - \dfrac{x}{y^2}\,dy = 0$;

e) $e^y\,dx - (2y - xe^y)\,dy = 0$; **f)** $e^x(1+e^y)\,dx + e^y(1+e^x)\,dy = 0$.

42. Rozwiązać następujące równania różniczkowe liniowe metodą uzmienniania stałej:

a) $y' - 2xy = x - x^3$; **b)** $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; **c)** $y' + y\operatorname{tg} x = \sin 2x$;

d) $y' - y\operatorname{tg} x = 2\cos^2 x$; **e)** $xy' - 2y = xe^{-\frac{1}{x}}$; **f)** $(1+x^2)y' + y = \operatorname{arc\,tg} x$.

43. Rozwiązać następujące równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach metodą przewidywań:

a) $y' - y = 2e^x$; **b)** $y' + y = e^{-x}$; **c)** $y' - 6y = -2e^{4x}$;

d) $y' + y = 2x^2 - 2x + 1$; **e)** $y' + y = x^3 + x^2 + x + 1$; **f)** $y' - y = xe^{2x}$;

g) $y' - y = 5\cos 2x$; **h)** $y' - y = \sin x$.

44. Rozwiązać następujące równania różniczkowe liniowe jednorodne rzędu drugiego o stałych współczynnikach:

a) $y'' - 5y' - 6y = 0$; **b)** $y'' + y' - 2y = 0$; **c)** $y'' = 0$;

d) $y'' + 2y' + y = 0$; **e)** $y'' + 6y' + 10y = 0$; **f)** $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Odpowiedzi. 39. a) $y = Ce^{-\frac{1}{2x}}$; **b)** $\cos y = C\cos x$; **c)** $1 + e^y = C(1+x^2)$; **d)** $y = e^{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; **e)** $\arcsin y - \operatorname{arc\,tg} x = C$; **f)** $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C$. **40. a)** $y = Ce^{\frac{x}{y}}$; **b)** $x^2 + 2xy = C$; **c)** $\ln(Cx) = -e^{-\frac{y}{x}}$; **d)** $x = Ce^{-\sin\frac{y}{x}}$; **e)** $y = x\arcsin(Cx)$; **f)** $y = xe^{Cx}$. **41. a)** $\frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 = C$; **b)** $x^2 - xy + 2y^2 = C$; **c)** $xy^3 + x^2y^2 = C$; **d)** $\frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 = C$; **e)** $xe^y - y^2 = C$; **f)** $e^x + e^y + e^{x+y} = C$. **42. a)** $y = Ce^{x^2} + \frac{1}{2}x^2$; **b)** $y = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2e^{-x^2}$; **c)** $y = C\cos x - 2\cos^2 x$; **d)** $y = \frac{C}{\cos x} + 2\operatorname{tg} x - \frac{2}{3}\operatorname{tg} x \sin^2 x$; **e)** $y = Cx^2 + x^2e^{-\frac{1}{x}}$; **f)** $y = Ce^{-\operatorname{arc\,tg} x} + \operatorname{arc\,tg} x - 1$. **43. a)** $y = Ce^x + 2xe^x$; **b)** $y = Ce^{-x} + xe^{-x}$; **c)** $y = Ce^{6x} + e^{4x}$; **d)** $y = Ce^{-x} + 2x^2 - 6x + 7$; **e)** $y = Ce^{-x} + x^3 - 2x^2 + 5x - 4$; **f)** $y = Ce^x + (x-1)e^{2x}$; **g)** $y = Ce^x + 2\sin 2x - \cos 2x$; **h)** $y = Ce^x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$. **44. a)** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$; **b)** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$; **c)** $y = C_1 + C_2x$; **d)** $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$; **e)** $y = e^{-3x}(C_1\sin x + C_2\cos x)$; **f)** $y = e^{3x}(C_1\sin 2x + C_2\cos 2x)$.

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna

45. Trzy fabryki produkują seryjnie ten sam towar. Pierwsza zaopatruje rynek w 40%, druga w 30%. Średni procent braków w produkcji pierwszej fabryki wynosi 2%, drugiej fabryki 4%, a trzeciej 5%. Kupiono sztukę towaru, która okazała się brakiem. Z której fabryki jest najbardziej prawdopodobny zakup braku? Podać odpowiadające prawdopodobieństwo.

46. Na pewnym kierunku studiów skład grup studenckich przedstawia się następująco: w grupie I jest 14 studentek i 11 studentów, w grupie II jest 12 studentek i 12 studentów, a w grupie III jest 17 studentek i 5 studentów. Z trzech list, z których każda jest listą jednej z wymienionych grup, losowano jedną osobę, która okazała się studentką. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że należy ona do grupy III.

47. Wiadomo, że 55% mężczyzn i 70 % kobiet nie zdaje egzaminu praktycznego na prawo jazdy za pierwszym razem. Wybrana losowo osoba nie zdała egzaminu. Zakładając, że liczba zdających egzamin kobiet i mężczyzn była taka sama, obliczyć, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wybraną osobą jest kobieta.

48. Około 10% studentów i 15% studentek pali papierosy. Z populacji liczącej 50 studentów i 100 studentek wylosowano osobę palącą papierosy. Obliczyć jest prawdopodobieństwo, że nie jest to mężczyzna.

49. Zakładając prawdopodobieństwa urodzenia chłopca 0,51 i dziewczynki 0,49 oraz niezależność tych zdarzeń dla kolejnych narodzin, obliczyć prawdopodobieństwo, że w rodzinie, w której będzie troje dzieci:
a) urodzą się trzy dziewczynki,
b) urodzą się jeden chłopiec,
c) urodzą się dwóch chłopców.
Kolejność przyjścia na świat dzieci nie jest istotna.

50. Służba sanitarna rozporządza trzema samochodami sanitarnymi. Prawdopodobieństwo tego, że w czasie od 8^{00} do 9^{00} dany samochód będzie w bazie jest dla każdego samochodu jednakowe i wynosi $p = 0{,}2$.
a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w danym czasie dwa samochody będą w bazie.
b) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w danym czasie co najmniej jeden samochód będzie w bazie.

51. W magazynie mamy trzy gatunki bawełny: 4 bele gatunku A_1, w którym 75% włókien jest o długości poniżej 4 cm, 3 bele gatunku A_2, w którym 80% włókien jest o długości poniżej 4 cm i 2 bele gatunku A_3, w którym 90% włókien jest o długości poniżej 4 cm.
a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że na 11 włókien wylosowanych z bel bawełny znajdującej się w magazynie będzie 5 włókien o długości poniżej 4 cm.
b) Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania trzech włókien o długości poniżej 4 cm jeśli losuje się trzykrotnie z bel bawełny gatunków A_1 i A_2.
c) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że na 8 włókien wylosowanych z beli gatunku A_2 będzie 6 włókien o długości poniżej 4 cm.
d) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wylosowane włókno o długości powyżej 4 cm pochodzi z beli gatunku A_1.
e) Wylosowano włókno o długości poniżej 4 cm. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pochodzi ono z beli gatunku A_3.

52. W pewnym punkcie sieci elektrycznej mierzono co godzinę istniejące napięcie w woltach. Otrzymano w ten sposób 10 następujących wyników: 225, 223, 224, 220, 221, 218, 215, 219, 220, 221. Obliczyć wartość średnią i odchylenie standardowe napięcia.

53. Tabela przedstawia wyniki pomiarów siły zrywającej w cN dla 100 odcinków przędzy wylosowanych z partii przędzy. Wyznaczyć wartość średnią i odchylenie standardowe siły zrywającej.

Siła	$185-195$	$195-205$	$205-215$	$215-225$	$225-235$
Liczność	7	28	30	27	8

54. Obliczyć współczynnik korelacji na podstawie próbki pobranej z dwuwymiarowej populacji.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	27	26	29	27	29	25	30	28	26	28
y_i	0,13	0,11	0,15	0,12	0,13	0,12	0,14	0,14	0,12	0,13

Odpowiedzi. 45. Z fabryki pierwszej; 0,4054. **46.** 0,4210. **47.** 0,56. **48.** 0,75. **49. a)** 0,1176; **b)** 0,3674; **c)** 0,3823. **50. a)** 0,096; **b)** 0,488. **51. a)** 0,0097; **b)** 0,4591; **c)** 0,2936. **d)** 0,5556; **e)** 0,25. **52.** 220,6; 2,8. **53.** 210,1; 10,72. **54.** 0,7924.