Matematyka 2 - Ćwiczenia - Literatura podstawowa

[1.] *Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniami. I, II*, Praca zbiorowa pod redakcją L. Siewierskiego, PWN, Warszawa 1979.

[2.] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach. I, II*, PWN, Warszawa 1994.

[3.] M. Lassak, *Matematyka dla studiów technicznych*, WYDAWNICTWO SUPREMUM, Bydgoszcz 2017.

Matematyka 2 - Ćwiczenia - Literatura uzupełniająca

[1.] J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, WNT, Warszawa 1993.

[2.] R. Leitner, W. Matuszewski, Z. Rojek, *Zadania z matematyki wyższej. I, II*, WNT, Warszawa 1994 (I), 1999 (II).

Szeregi funkcyjne

1. Wyznaczyć promień zbieżności następujących szeregów potęgowych:

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n;\quad \textbf{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n)!}{n^n(2n)!}x^n;\quad \textbf{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n;\quad \textbf{d)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^n;\quad \textbf{e)}\ \sum_{n=0}^{\infty}9^nx^n.$$

2. Wyznaczyć promień zbieżności i zbadać zbieżność na końcach przedziału zbieżności następujących szeregów potęgowych:

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}x^n;\quad \textbf{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}x^n;\quad \textbf{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{3^n\cdot 4^{n+1}}x^n;\quad \textbf{d)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}x^n;$$

$$\textbf{e)}\ \sum_{n=0}^{\infty}n!x^n;\quad \textbf{f)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^nx^{2n};\quad \textbf{g)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(2n-1)}(x-1)^n;$$

$$\textbf{h)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n-2}(2x+1)^n;\quad \textbf{i)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1};\quad \textbf{j)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(x-4)^{2n+1}.$$

Odpowiedzi. 1. a) $R=\frac{1}{4}$; **b)** $R=\frac{4}{27}e$; **c)** $R=27$; **d)** $R=3$; **e)** $R=\frac{1}{9}$. **2. a)** $R=1$, $x\in[-1,1)$; **b)** $R=5$, $x\in[-5,5)$; **c)** $R=12$, $x\in(-12,12)$; **d)** $R=+\infty$, $x\in(-\infty,+\infty)$; **e)** $R=0$, $x=0$; **f)** $R=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $x\in\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$; **g)** $R=2$, $x\in[-1,3)$; **h)** $R=1$, $x\in[-1,0)$; **i)** $R=+\infty$, $x\in(-\infty,+\infty)$; **j)** $R=1$, $x\in[3,5]$.

Liczby zespolone

3. Znaleźć część rzeczywistą i część urojoną następujących liczb zespolonych:

$$\textbf{a)}\ (2-3i)(5+4i);\quad \textbf{b)}\ (5+2i)(5-2i);\quad \textbf{c)}\ (1+i)^3-(1-i)^3;\quad \textbf{d)}\ (2-i)^3+(1-i)^2;$$

$$\textbf{e)}\ \frac{3+2i}{4-3i};\quad \textbf{f)}\ \frac{1}{i};\quad \textbf{g)}\ \frac{(\sqrt{3}+i)(-1+\sqrt{3}i)}{(1+i)^2};\quad \textbf{h)}\ \frac{(1-i)^2-i}{(1+i)^2+i}.$$

4. Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:

$$\textbf{a)}\ 4;\quad \textbf{b)}\ -5;\quad \textbf{c)}\ 6i;\quad \textbf{d)}\ -7i;$$

$$\textbf{e)}\ 1+\sqrt{3}i;\quad \textbf{f)}\ 1-i;\quad \textbf{g)}\ -\sqrt{2}+\sqrt{2}i;\quad \textbf{h)}\ -\sqrt{3}-i.$$

5. Obliczyć:

$$\textbf{a)}\ (2+\sqrt{12}i)^5;\quad \textbf{b)}\ (1-\sqrt{3}i)^6;\quad \textbf{c)}\ (1+i)^{10};\quad \textbf{d)}\ (1+\sqrt{3}i)^{1997};$$

$$\textbf{e)}\ \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{12};\quad \textbf{f)}\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{26};\quad \textbf{g)}\ \left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{7};\quad \textbf{h)}\ \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}.$$

6. Obliczyć pierwiastki drugiego stopnia z następujących liczb zespolonych:

$$\textbf{a)}\ 1;\quad \textbf{b)}\ -1;\quad \textbf{c)}\ i;\quad \textbf{d)}\ -i;\quad \textbf{e)}\ 1-\sqrt{3}i;$$

f) $-1+i$; **g)** $-3-4i$; **h)** $8+6i$; **i)** $-15+8i$; **j)** $11-60i$.

7. Obliczyć pierwiastki trzeciego stopnia z następujących liczb zespolonych:

a) 1; **b)** -1; **c)** i; **d)** $-i$; **e)** $1+i$; **f)** $-1+\sqrt{3}i$; **g)** $\sqrt{3}-i$; **h)** $-1-i$.

8. Rozwiązać następujące równania zespolone:

a) $z^2-2z+10=0$; **b)** $z^2-6z+10=0$; **c)** $z^2+z+1=0$;

d) $z^2-(2+i)z-1+7i=0$; **e)** $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$; **f)** $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$;

g) $z^3+8=0$; **h)** $z^3-27=0$; **i)** $z^4-1=0$; **j)** $z^4+4=0$.

Odpowiedzi. 3. a) $22,\ -7$; **b)** $29,\ 0$; **c)** $0,\ 4$; **d)** $2,\ -13$; **e)** $\frac{6}{25},\ \frac{17}{25}$; **f)** $1,\ \sqrt{3}$; **g)** $-1,\ 0$; **h)** $0,\ -1$. **4. a)** $4(\cos 0+i\sin 0)$; **b)** $5(\cos\pi+i\sin\pi)$; **c)** $6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; **d)** $7\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; **e)** $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; **f)** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; **g)** $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; **h)** $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$. **5. a)** $512-512\sqrt{3}i$; **b)** 64; **c)** $32i$; **d)** $2^{1996}-2^{1996}\sqrt{3}i$; **e)** 1; **f)** i; **g)** $-i$; **h)** $512-512\sqrt{3}i$. **6. a)** $-1,\ 1$; **b)** $-i,\ i$; **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; **d)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; **e)** $-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; **f)** $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}\right)$; **g)** $-1+2i,\ 1-2i$; **h)** $-3-i,\ 3+i$; **i)** $-1-4i,\ 1+4i$; **j)** $-6+5i,\ 6-5i$. **7. a)** $1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; **b)** $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ -i$; **d)** $i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; **e)** $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),\ -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}i,\ \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$; **f)** $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$, $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$, $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$; **g)** $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{18}+i\sin\frac{11\pi}{18}\right)$, $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{18}+i\sin\frac{23\pi}{18}\right)$, $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{35\pi}{18}+i\sin\frac{35\pi}{18}\right)$; **h)** $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right),\ \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right),\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}i$. **8. a)** $1-3i,\ 1+3i$; **b)** $3-i,\ 3+i$; **c)** $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; **d)** $3-i,\ -1+2i$; **e)** $2+i,\ 1-3i$; **f)** $1-i,\ \frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$; **g)** $1+\sqrt{3}i,\ -2,\ 1-\sqrt{3}i$; **h)** $3,\ -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$; **i)** $1,\ i,\ -1,\ -i$; **j)** $1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1-i$.

Macierze. Wyznaczniki. Układy równań liniowych

9. Wyznaczyć (o ile istnieją) iloczyny macierzy $A\cdot B$, $B\cdot A$, $A^{\mathrm{T}}\cdot B^{\mathrm{T}}$, $B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$, jeśli:

$$\textbf{a)}\ A=\begin{bmatrix}3&-2\\5&-4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3&4\\2&5\end{bmatrix};\qquad \textbf{b)}\ A=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\\1&0&1\end{bmatrix};$$

$$\textbf{c)}\ A=\begin{bmatrix}1&5&0\\3&2&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}5&7\\2&3\end{bmatrix};\qquad \textbf{d)}\ A=\begin{bmatrix}1&0&2\\3&5&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&3\\7&5\\0&2\end{bmatrix}.$$

10. Obliczyć następujące wyznaczniki:

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix}2&3\\1&4\end{vmatrix};\quad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix};\quad \textbf{c)}\ \begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix};\quad \textbf{d)}\ \begin{vmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{vmatrix};$$

$$\textbf{e)}\ \begin{vmatrix}1&3&4&5\\3&0&0&2\\5&1&2&7\\2&0&0&3\end{vmatrix};\quad \textbf{f)}\ \begin{vmatrix}0&5&0&2\\8&3&4&5\\7&2&1&4\\0&4&0&1\end{vmatrix};\quad \textbf{g)}\ \begin{vmatrix}3&4&-3&-1&2\\-5&6&5&2&3\\4&-9&-3&7&-5\\-1&-4&1&1&-2\\-3&7&5&2&3\end{vmatrix};$$

$$\textbf{h)}\ \begin{vmatrix}2&1&4&3&5&3\\5&6&8&7&4&2\\8&9&7&6&0&0\\2&3&5&4&0&0\\4&3&0&0&0&0\\6&5&0&0&0&0\end{vmatrix};\quad \textbf{i)}\ \begin{vmatrix}7&6&5&4&4&2\\9&7&8&9&3&3\\7&4&9&7&0&0\\5&3&6&1&0&0\\0&0&5&6&0&0\\0&0&6&8&0&0\end{vmatrix};\quad \textbf{j)}\ \begin{vmatrix}2&3&0&0&1&-1\\9&4&0&0&3&7\\4&5&1&-1&2&4\\3&8&3&7&6&9\\1&-1&0&0&0&0\\3&7&0&0&0&0\end{vmatrix}.$$

11. Wyznaczyć macierze odwrotne do następujących macierzy:

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix};\quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix};$$

$$\textbf{c)}\ \begin{bmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix};\quad \textbf{d)}\ \begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix};\quad \textbf{e)}\ \begin{bmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\1&-2&5\end{bmatrix}.$$

12. Wyznaczyć macierze X spełniające następujące równania:

$$\textbf{a)}\ X\cdot\begin{bmatrix}3&-2\\5&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\\-5&6\end{bmatrix};\qquad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}4&-6\\2&1\end{bmatrix};$$

$$\textbf{c)}\ \begin{bmatrix}3&1\\3&2\end{bmatrix}\cdot X\cdot\begin{bmatrix}-3&2\\5&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&4\\3&-1\end{bmatrix}.$$

13. Wyznaczyć rzędy następujących macierzy:

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix}1&3\\5&8\end{bmatrix};\quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix}-2&3\\-4&6\end{bmatrix};\quad \textbf{c)}\ \begin{bmatrix}4&-8&-4&12&18\\3&-6&-3&9&12\end{bmatrix};$$

$$\textbf{d)}\ \begin{bmatrix}2&1\\3&1\\4&1\end{bmatrix};\quad \textbf{e)}\ \begin{bmatrix}-1&1\\2&-2\\-3&3\end{bmatrix};\quad \textbf{f)}\ \begin{bmatrix}1&3&-2&0\\2&6&-4&0\\-1&3&2&0\end{bmatrix};$$

$$\textbf{g)}\ \begin{bmatrix}2&0&1&0&1\\1&1&0&1&1\\1&3&-1&3&2\end{bmatrix};\quad \textbf{h)}\ \begin{bmatrix}1&-1&0&2&3\\2&-2&0&4&6\\0&1&1&-1&-1\end{bmatrix};$$

$$\textbf{i)}\ \begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&-2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{bmatrix};\quad \textbf{j)}\ \begin{bmatrix}2&1&-3&5&-1\\2&1&-3&5&-1\\1&-1&2&3&1\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}.$$

14. Rozwiązać następujące układy równań liniowych:

$$\textbf{a)}\ \begin{cases}3x+5y=5\\x-2y=9\end{cases};\quad \textbf{b)}\ \begin{cases}2x-4y=10\\5x-10y=25\end{cases};\quad \textbf{c)}\ \begin{cases}6x-4y=5\\9x-6y=2\end{cases};$$

$$\textbf{d)}\ \begin{cases}x+2y+3z=14\\3x+y+2z=11\\2x+3y+z=11\end{cases};\quad \textbf{e)}\ \begin{cases}2x-y+z=1\\3x+y-2z=0\\x-3y-z=2\end{cases};$$

$$\textbf{f)}\ \begin{cases}2x+5y-8z=8\\4x+3y-9z=9\\2x+3y-5z=7\\x+8y-7z=12\end{cases};\quad \textbf{g)}\ \begin{cases}4x-6y+2z+3t=2\\2x-3y+5z+7t=1\\2x-3y-11z-15t=1\end{cases};$$

$$\textbf{h)}\ \begin{cases}3x-5y+2z+4t=2\\7x-4y+z+3t=5\\5x+7y-4z-6t=3\end{cases};\quad \textbf{i)}\ \begin{cases}3x-2y+5z+4t=2\\6x+4y+4z+3t=3\\9x-6y+3z+2t=4\end{cases};$$

$$\textbf{j)}\ \begin{cases}x+y+3z-2t+3u=1\\2x+2y+4z-t+3u=2\\3x+3y+5z-2t+3u=1\\2x+2y+8z-3t+9u=2\end{cases};$$

$$\textbf{k)}\ \begin{cases}6x+4y+5z+2t+3u=1\\3x+2y+4z+t+2u=3\\3x+2y-2z+t=-7\\9x+6y+z+3t+2u=2\end{cases};$$

$$\textbf{l)}\ \begin{cases}x+2y+3z-2t+u=4\\3x+6y+5z-4t+3u=5\\x+2y+7z-4t+u=11\\2x+4y+2z-3t+3u=6\end{cases};$$

$$\textbf{m)}\ \left\{\ 4x-3y=0\right.;\quad \textbf{n)}\ \left\{\ 2x+5y-4z=0\right.;$$

$$\textbf{o)}\ \begin{cases}4x-6y=0\\6x-9y=0\end{cases};\quad \textbf{p)}\ \begin{cases}2x+3y=0\\3x-5y=0\end{cases};$$

q) $\begin{cases} 2x - 12y + 6z = 0 \\ 5x - 30y + 15z = 0 \end{cases}$; **r)** $\begin{cases} 4x - 6y + 10z = 0 \\ 6x - 9y - 15z = 0 \end{cases}$;

s) $\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 5x - 10y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$; **t)** $\begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 6x - 9y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$.

15. Wyznaczyć wartości własne oraz wektory własne następujących macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; **g)** $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

h) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **i)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; **j)** $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Odpowiedzi. 9. a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} 29 & -22 \\ 31 & -24 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 29 & 31 \\ -22 & -24 \end{bmatrix}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$; **b)** $A \cdot B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; **c)** $B \cdot A = \begin{bmatrix} 26 & 39 & 7 \\ 11 & 16 & 3 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 26 & 11 \\ 39 & 16 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$; **d)** $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 38 & 36 \end{bmatrix}$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 5 \\ 22 & 25 & 19 \\ 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 10 & 22 & 6 \\ 15 & 25 & 10 \\ 5 & 19 & 2 \end{bmatrix}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 38 \\ 7 & 36 \end{bmatrix}$. **10. a)** 5; **b)** 5; **c)** 1; **d)** 1; **e)** -10; **f)** -60; **g)** 14; **h)** 8; **i)** 24; **j)** 1000. **11. a)** $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$; **e)** $\begin{bmatrix} \frac{19}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{11}{4} \\ -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{11}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$. **12. a)** $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 8 & \frac{13}{3} \\ -10 & -5 \end{bmatrix}$. **13. a)** 2; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 2; **e)** 1; **f)** 1; **g)** 2; **h)** 2; **i)** 4; **j)** 3. **14. a)** $x = 5$, $y = -2$; **b)** $x = 5 + 2t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$; **c)** układ sprzeczny; **d)** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; **e)** $x = \frac{1}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$, $z = 0$; **f)** $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$; **g)** $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{16}u_2$, $y = u_1$, $z = -\frac{11}{8}u_2$, $t = u_2$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$; **h)** układ sprzeczny; **i)** $x = \frac{7}{18} + \frac{1}{18}u$, $y = 0$, $z = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}u$, $t = u$, $u \in \mathbb{R}$; **j)** układ sprzeczny; **k)** $x = w_1$, $y = w_2$, $z = 13$, $t = 19 - 3w_1 - 2w_2$, $u = -34$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$; **l)** $x = -\frac{9}{2} - 2w_1 - w_2$, $y = w_1$, $z = w_2$, $t = -\frac{7}{2} + 2w_2$, $u = \frac{3}{2} + 2w_2$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$; **m)** $x = \frac{3}{4}t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$; **n)** $x = -\frac{5}{2}t_1 + 2t_2$, $y = t_1$, $z = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$; **o)** $x = \frac{3}{2}t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$; **p)** $x = 0$, $y = 0$; **q)** $x = 6t_1 - 3t_2$, $y = t_1$, $z = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$; **r)** $x = \frac{3}{2}t$, $y = t$, $z = 0$, $t \in \mathbb{R}$; **s)** $x = 0$, $y = 0$; **t)** $x = \frac{3}{2}t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$. **15. a)** $\lambda_{1,2} = 2$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\lambda_1 = -1$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; **c)** $\lambda_1 = -1$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 2$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; **d)** $\lambda_1 = 0$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 5$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; **e)** $\lambda_1 = 4$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 10$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; **f)** $\lambda_1 = 2$, $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 3$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$; **g)** $\lambda_{1,2} = 2$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; **h)** $\lambda_1 = -2$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 3$, $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; **i)** $\lambda_{1,2} = 0$, $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 3$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; **j)** $\lambda_1 = -1$, $v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\lambda_{2,3} = 0$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Wektory w $\mathbb{R}^3$

16. Obliczyć cosinus i moduł sinusa kąta φ między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

a) $\vec{u} = [1, -2, 2]$, $\vec{v} = [2, 1, -2]$; **b)** $\vec{u} = [-1, 0, 3]$, $\vec{v} = [6, 7, 2]$; **c)** $\vec{u} = [-1, 0, 3]$, $\vec{v} = [3, 0, -9]$.

17. Obliczyć pole równoległoboku opartego na wektorach $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, jeśli $A = (2, 3, -6)$, $B = (6, 4, 4)$, $C = (3, 7, 4)$.

18. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (-1, 0, -1)$, $B = (0, 2, -3)$ i $C = (4, 4, 1)$.

19. Zbadać, czy punkty $P = (0, 0, 3)$, $R = (-1, 2, 4)$ i $S = (2, -4, 1)$ leżą na jednej prostej.

20. Obliczyć objętość równoległościanu opartego na wektorach $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$, jeśli $A = (3, 4, 3)$, $B = (9, 5, -1)$, $C = (1, 7, 0)$, $D = (3, 2, 5)$.

21. Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach $A = (3, 1, 1)$, $B = (1, 4, 1)$, $C = (1, 1, 7)$ i $D = (3, 4, 9)$.

22. Objętość czworościanu $ABCD$ o trzech danych wierzchołkach $A = (2, 0, -1)$, $B = (3, -1, 1)$ i $C = (2, -2, 3)$ jest równa 5. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka D wiedząc, że leży on na osi Oy.

23. Zbadać, czy punkty $P = (0, 3, 4)$, $R = (-1, 2, 2)$, $S = (2, 0, 3)$ i $T = (-1, 1, 1)$ leżą na jednej płaszczyźnie.

Odpowiedzi. 16. a) $-\frac{4}{9}$, $\frac{\sqrt{65}}{9}$; **b)** 0, 1; **c)** -1, 0. **17.** 45. **18.** 9. **19.** Tak. **20.** 12. **21.** 2. **22.** $(0, -8, 0)$ lub $(0, 7, 0)$. **23.** Tak.

Prosta w $\mathbb{R}^2$

24. Napisać równanie prostej l:
a) przechodzącej przez punkty $P = (1, 0)$ i $R = (-7, 1)$;
b) przechodzącej przez punkt $P = (-1, 3)$ i prostopadłej do wektora $\vec{n} = [3, -2]$;
c) przechodzącej przez punkt $P = (-1, 5)$ i równoległej do prostej $l_1 : 3x - y + 10 = 0$;
d) przechodzącej przez punkt $P = (1, -3)$ i prostopadłej do prostej $l_1 : x - 2y + 5 = 0$.

25. Wyznaczyć punkt przecięcia prostych $l_1 : 4x + 7y - 15 = 0$ i $l_2 : 9x - 14y - 4 = 0$.

26. Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu $P = (-1, -3)$ względem prostej $l : x + 2y - 2 = 0$.

27. Obliczyć odległość punktu $P = (1, -2)$ od prostej $l : 8x - 6y + 15 = 0$.

28. Obliczyć odległość między prostymi $l_1 : 3x - 4y + 25 = 0$ i $l_2 : 6x - 8y + 45 = 0$.

Odpowiedzi. 24. a) $x + 8y - 1 = 0$; **b)** $3x - 2y + 9 = 0$; **c)** $x - 2y + 11 = 0$; **d)** $2x + y + 1 = 0$. **25.** $(2, 1)$. **26.** $P = (\frac{13}{5}, \frac{21}{5})$. **27.** $\frac{7}{2}$. **28.** $\frac{1}{2}$.

Płaszczyzna i prosta w $\mathbb{R}^3$

29. Napisać równanie płaszczyzny π:
a) przechodzącej przez punkt $P = (1, -1, 3)$ i prostopadłej do wektora $\vec{n} = [5, 2, 1]$;
b) przechodzącej przez punkt $P = (-2, 7, 3)$ i równoległej do płaszczyzny $\pi_1 : x - 4y + 5z + 1 = 0$;
c) przechodzącej przez punkty $P = (1, 2, -1)$, $R = (-2, -1, 5)$ i $S = (2, 2, 2)$.

30. Dane są punkty $P = (1, 3, -2)$ i $R = (7, -4, 4)$. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt R i prostopadłej do odcinka PR.

31. Wyznaczyć wspólny punkt trzech płaszczyzn $\pi_1 : 5x + 8y - z - 7 = 0$, $\pi_2 : x + 2y + 3z - 1 = 0$ i $\pi_3 : 2x - 3y + 2z - 9 = 0$.

32. Wyznaczyć odległość punktu $P = (3, 1, -1)$ od płaszczyzny $\pi : 22x + 4y - 20z - 45 = 0$.

33. Wyznaczyć odległość między płaszczynami $\pi_1 : 3x+4y-12z+13 = 0$ i $\pi_2 : 3x+4y-12z+39 = 0$.

34. Napisać równania parametryczne, zwyczajne i krawędziowe prostej l:
a) przechodzącej przez punkt $P = (-3, 2, 1)$ i równoległej do wektora $\vec{u} = [-6, 1, 4]$;
b) przechodzącej przez punkty $P = (3, 6, 8)$ i $R = (-1, 4, 3)$;
c) przechodzącej przez punkt $P = (2, 1, -2)$ i równoległej do prostej $l_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$;
d) przechodzącej przez punkt $P = (3, -2, 4)$ i prostopadłej do płaszczyzny $\pi : 5x + 3y - 7z + 1 = 0$.

35. Prostą $l : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & 3y & - & 3z & - & 9 & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & + & 3 & = & 0 \end{array} \right.$ sprowadzić do postaci parametrycznej i zwyczajnej.

36. Wyznaczyć punkt przecięcia prostych $l_1 : \frac{x-1}{2} = y - 7 = \frac{z-5}{4}$ i $l_2 : \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = z$.

37. Wyznaczyć odległość punktu $P = (7, 9, 7)$ od prostej $l : \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

38. Wyznaczyć odległość prostych l_1 i l_2, jeśli: **a)** $l_1 : x - 1 = \frac{y+1}{2} = z$, $l_2 : x - 2 = \frac{y+1}{2} = z - 1$; **b)** $l_1 : \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = z$, $l_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$.

39. Wyznaczyć punkt przecięcia prostej $l: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = z-1$ z płaszczyzną $\pi: 3x+5y+z+2=0$.

40. Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu $P=(4,-3,1)$ względem płaszczyzny $\pi: x+2y-z-3=0$.

41. Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu $P=(1,-2,1)$ względem prostej $l: x+1 = \frac{y+8}{-1} = \frac{z-2}{2}$.

Odpowiedzi. 29. a) $5x+2y+3z-12=0$; **b)** przechodzącej przez punkt $x-4y+5z+15=0$; **c)** przechodzącej przez punkty $3x-5y-z+6=0$. **30.** $6x-7y+6z-94=0$. **31.** $(3,-1,0)$. **32.** $\frac{3}{2}$. **33.** 2. **34. a)** $\begin{cases} x=-6t-3 \\ y=t+2 \\ z=4t+1 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$; $\frac{x+3}{-6} = y-2 = \frac{z-1}{4}$; $\begin{cases} x+6y-9=0 \\ 4y-z-7=0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x=4t-1 \\ y=2t+4 \\ z=5t+3 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$; $\frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{5}$; $\begin{cases} x-2y+9=0 \\ 5y-2z-14=0 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x=2t+2 \\ y=3t-2 \\ z=2t-2 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$; $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}$; $\begin{cases} 3x-2y-4=0 \\ 2y-3z-8=0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x=5t+3 \\ y=3t-2 \\ z=-7t+4 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$; $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-7}$; $\begin{cases} 3x-5y-19=0 \\ 7y+3z+2=0 \end{cases}$. **35.** $\begin{cases} x=9t+27 \\ y=5t+15 \\ z=t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$; $\frac{x-27}{9} = \frac{y-15}{5} = z$. **36.** $(-3,5,-3)$. **37.** $\sqrt{22}$. **38. a)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$; **b)** 7. **39.** $(0,0-2)$. **40.** $(6,1,-1)$. **41.** $(-5,-12,-1)$.

Krzywe stopnia drugiego (stożkowe)

42. Wyznaczyć współrzędne środka, promień i naszkicować okrąg o równaniu: **a)** $x^2+y^2-16=0$; **b)** $4x^2+4y^2+6x-4y+1=0$; **c)** $x^2+y^2-4x=0$; **d)** $x^2+y^2+6y-16=0$.

43. Wyznaczyć wierzchołki, ogniska i naszkicować elipsę o równaniu: **a)** $4x^2+25y^2=100$; **b)** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

44. Wyznaczyć wierzchołki, ogniska, asymptoty i naszkicować hiperbolę o równaniu: **a)** $4x^2-25y^2=100$; **b)** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$.

45. Wyznaczyć wierzchołek, ognisko, kierownicę i naszkicować parabolę o równaniu: **a)** $y^2=4x$; **b)** $y^2=8x$.

46. Napisać równania stycznej i normalnej do:
a) okręgu $x^2+y^2=10$ w punkcie $P=(1,3)$;
b) elipsy $18x^2+32y^2=576$ w punkcie $P=(4,3)$;
c) hiperboli $24x^2-25y^2=600$ w punkcie $P=(25,-24)$;
d) paraboli $y^2=6x$ w punkcie $P=(6,-6)$.

47. Napisać równania stycznych do:
a) okręgu $x^2+y^2=20$ poprowadzonych z punktu $P=(4,3)$;
b) okręgu $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ równoległych do prostej $l: 3x-4y=0$;
c) okręgu $x^2+y^2=9$ prostopadłych do prostej $l: 3x-4y-12=0$.
d) elipsy $x^2+3y^2=4$ poprowadzonych z punktu $P=(5,3)$;
e) elipsy $9x^2+25y^2=225$ równoległych do prostej $l: 4x+5y-7=0$;
f) elipsy $x^2+2y^2=18$ prostopadłych do prostej $l: x-2y+4=0$;
g) hiperboli $2x^2-3y^2=24$ poprowadzonych z punktu $P=(3,1)$;
h) hiperboli $2x^2-5y^2=30$ równoległych do prostej $l: x+y-7=0$;
i) hiperboli $4x^2-y^2=36$ prostopadłych do prostej $l: 2x+5y+11=0$;
j) paraboli $y^2=36x$ poprowadzonych z punktu $P=(0,3)$.

48. Napisać równanie stycznej do:
a) paraboli $y^2=4x$ równoległej do prostej $l: 2x+y-4=0$;
b) paraboli $y^2=2x$ prostopadłej do prostej $l: x-2y+3=0$.

Odpowiedzi. 42. a) $(0,0)$, 4; **b)** $(-\frac{3}{4},\frac{1}{2})$, $\frac{3}{4}$; **c)** $(2,0)$, 2; **d)** $(0,-3)$, 5. **43. a)** wierzchołki: $(-5,0)$, $(5,0)$, $(0,-2)$, $(0,2)$; ogniska: $(-\sqrt{21},0)$, $(\sqrt{21},0)$; **b)** wierzchołki: $(-5,0)$, $(5,0)$, $(0,-4)$, $(0,4)$; ogniska: $(-3,0)$, $(3,0)$. **44. a)** wierzchołki: $(-5,0)$, $(5,0)$; ogniska: $(-\sqrt{29},0)$, $(\sqrt{29},0)$; asymptoty: $y=-\frac{2}{5}x$, $y=\frac{2}{5}x$; **b)** wierzchołki: $(-2,0)$, $(2,0)$; ogniska: $(-\sqrt{29},0)$, $(\sqrt{29},0)$; asymptoty: $y=-\frac{5}{2}x$, $y=\frac{5}{2}x$. **45. a)** wierzchołek: $(0,0)$; ognisko: $(1,0)$; kierownica: $x=-1$; **b)** wierzchołek: $(0,0)$; ognisko: $(2,0)$; kierownica: $x=-2$. **46. a)** styczna: $x+3y-10=0$; normalna: $3x-y=0$; **b)** styczna: $3x+4y-24=0$; normalna: $4x-3y-7=0$; **c)** styczna: $x+y-1=0$; normalna: $x-y-49=0$; **d)** styczna: $x+2y+6=0$; normalna: $2x-y-18=0$. **47. a)** $x+2y-10=0$, $11x+2y-50=0$; **b)** $3x-4y-36=0$, $3x-4y+14=0$; **c)** $4x+3y+15=0$, $4x+3y-15=0$; **d)** $23x-21y-52=0$, $x-3y+4=0$; **e)** $4x+5y-25=0$, $4x+5y+25=0$; **f)** $2x+y+9=0$, $2x+y-9=0$; **g)** $3x+y-10=0$, $x-y-2=0$; **h)** $x+y-3=0$, $x+y+3=0$; **i)** $5x-2y-9=0$, $5x-2y+9=0$; **j)** $x=0$, $3x-y+3=0$. **48. a)** $4x+2y+1=0$; **b)** $8x+4y+1=0$.

Elementy rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych

49. Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego następujących funkcji:

a) $f(x,y)=x^4+y^4-4x^2y^2$; **b)** $f(x,y)=\sqrt{2xy+y^2}$; **c)** $f(x,y)=e^{xe^y}$;

d) $f(x,y)=y\ln x$; **e)** $f(x,y)=\ln(x+y^2)$; **f)** $f(x,y)=\ln(x+\ln y)$;

g) $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$; **h)** $f(x,y)=\sin^2(2x+y)$; **i)** $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$; **j)** $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$;

k) $f(x,y,z)=x^3+y^2z^2+3yz+2x+3y$; **l)** $f(x,y,z)=x^3yz$;

m) $f(x,y,z)=xy\cos 2z$; **n)** $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; **o)** $f(x,y,z)=e^{xy-z}$.

50. Wyznaczyć wskazane pochodne cząstkowe następujących funkcji:

a) $f(x,y)=e^{xy^2}$, f'''_{yxx}; **b)** $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, f'''_{yyx}; **c)** $f(x,y)=\sin(xy)$, f'''_{yyx};

d) $f(x,y,z)=\dfrac{x^4}{y^2z^3}$, f'''_{zyx}; **e)** $f(x,y,z)=e^{xyz}$, f'''_{xyz}.

51. Wyznaczyć pochodną lub pochodne cząstkowe funkcji złożonej:

a) $z=\ln(e^x+e^y)$, $y=x^3$; **b)** $z=x^y$, $y=\dfrac{1}{x}$; **c)** $z=e^{x-2y}$, $x=\sin t$, $y=t^3$;

d) $z=x^2+y^2$, $x=\cos t$, $y=\sin t$; **e)** $z=x^2y-xy^2$, $x=u+v$, $y=u-v$.

52. Wyznaczyć pochodne f', f'' funkcji uwikłanej $y=f(x)$ danej równaniem:

a) $x^2-xy+2y^2+x-y=0$; **b)** $xy-\ln y-1=0$; **c)** $x^2y-e^{2y}=0$; **d)** $ye^x+e^y=0$.

53. Wyznaczyć ekstrema lokalne następujących funkcji:

a) $f(x,y)=(x-1)^2+2y^2$; **b)** $f(x,y)=(x-1)^2-2y^2$;

c) $f(x,y)=(x+y)^2-xy-x-5y$; **d)** $f(x,y)=2x^2+3xy+y^2-2x-y+1$;

e) $f(x,y)=x^2-xy+2y^2-x+4y-5$; **f)** $f(x,y)=-x^2+xy-y^2-3x+2y-1$;

g) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-6x-4y+5$; **h)** $f(x,y)=-x^2+xy-y^2+2x-y$;

i) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$; **j)** $f(x,y)=y^3+x^2-6xy+3x+6y$;

k) $f(x,y)=x^3+y^2-6xy-48x$; **l)** $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$;

m) $f(x,y)=4xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$; **n)** $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$;

o) $f(x,y)=(4x+y^2)e^{2x}$; **p)** $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$;

q) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$;

r) $f(x,y,z)=-x^2-y^2-z^2+8x-6y+12z$;

s) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x+2z-1$;

t) $f(x,y,z)=\dfrac{2x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}-4x+2z^2$.

54. Wykazać, że następujące pola wektorowe ω mają potencjały i je wyznaczyć, jeśli:

a) $\omega(x,y)=[y,x]$; **b)** $\omega(x,y)=[x^2+2xy-y^2,x^2-2xy-y^2]$; **c)** $\omega(x,y)=[\cos x+3x^2y,x^3-y^2]$;

d) $\omega(x,y,z)=[2x+y+z,x+2y+z,x+y+2z]$; **e)** $\omega(x,y,z)=[3x^2+2y^2+3z,4xy+2y-z,3x-y-2]$.

Odpowiedzi. 49. a) $f'_x(x,y) = 4x^3 - 8xy^2$, $f'_y(x,y) = 4y^3 - 8x^2y$, $f''_{xx}(x,y) = 12x^2 - 8y^2$, $f''_{xy}(x,y) = -16xy = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = 12y^2 - 8x^2$; **b)** $f'_x(x,y) = \frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}}$, $f'_y(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}}$, $f''_{xx}(x,y) = -\frac{y^2}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f''_{xy}(x,y) = \frac{xy}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = -\frac{x^2}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; **c)** $f'_x(x,y) = e^{xe^y+y}$, $f'_y(x,y) = xe^{xe^y+y}$, $f''_{xx}(x,y) = e^{xe^y+2y}$, $f''_{xy}(x,y) = (xe^y+1)e^{xe^y+y} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = x(xe^y+1)e^{xe^y+y}$; **d)** $f'_x(x,y) = \frac{y}{x}$, $f'_y(x,y) = \ln x$, $f''_{xx}(x,y) = -\frac{y}{x^2}$, $f''_{xy}(x,y) = \frac{1}{x} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = 0$; **e)** $f'_x(x,y) = \frac{1}{x+y^2}$, $f'_y(x,y) = \frac{2y}{x+y^2}$, $f''_{xx}(x,y) = -\frac{1}{(x+y^2)^2}$, $f''_{xy}(x,y) = -\frac{2y}{(x+y^2)^2} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$; **f)** $f'_x(x,y) = \frac{1}{x+\ln y}$, $f'_y(x,y) = \frac{1}{y(x+\ln y)}$, $f''_{xx}(x,y) = -\frac{1}{(x+\ln y)^2}$, $f''_{xy}(x,y) = -\frac{1}{y(x+\ln y)^2} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = -\frac{x+\ln y+1}{y^2(x+\ln y)^2}$; **g)** $f'_x(x,y) = \frac{1}{y^2}$, $f'_y(x,y) = -\frac{2x}{y^3}$, $f''_{xx}(x,y) = 0$, $f''_{xy}(x,y) = -\frac{2}{y^3} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = \frac{6x}{y^4}$; **h)** $f'_x(x,y) = 2\sin(4x+2y)$, $f'_y(x,y) = \sin(4x+2y)$, $f''_{xx}(x,y) = 8\cos(4x+2y)$, $f''_{xy}(x,y) = 4\cos(4x+2y) = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = 2\cos(4x+2y)$; **i)** $f'_x(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2}$, $f'_y(x,y) = -\frac{2x}{(x+y)^2}$, $f''_{xx}(x,y) = -\frac{4y}{(x+y)^3}$, $f''_{xy}(x,y) = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = \frac{4x}{(x+y)^3}$; **j)** $f'_x(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $f'_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $f''_{xx}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{xy}(x,y) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = f''_{yx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; **k)** $f'_x(x,y,z) = 3x^2+2$, $f'_y(x,y,z) = 2yz^2+3z+3$, $f'_z(x,y,z) = 2y^2z+3y$, $f''_{xx}(x,y,z) = 6x$, $f''_{xy}(x,y,z) = 0 = f''_{yx}(x,y,z)$, $f''_{xz}(x,y,z) = 0 = f''_{zx}(x,y,z)$, $f''_{yy}(x,y,z) = 2z^2$, $f''_{yz}(x,y,z) = 4yz+3 = f''_{zy}(x,y,z)$, $f''_{zz}(x,y,z) = 2y^2$; **l)** $f'_x(x,y,z) = 3x^2yz$, $f'_y(x,y,z) = x^3z$, $f'_z(x,y,z) = x^3y$, $f''_{xx}(x,y,z) = 6xyz$, $f''_{xy}(x,y,z) = 3x^2z = f''_{yx}(x,y,z)$, $f''_{xz}(x,y,z) = 3x^2y = f''_{zx}(x,y,z)$, $f''_{yy}(x,y,z) = 0$, $f''_{yz}(x,y,z) = x^3 = f''_{zy}(x,y,z)$, $f''_{zz}(x,y,z) = 0$; **m)** $f'_x(x,y,z) = y\cos 2z$, $f'_y(x,y,z) = x\cos 2z$, $f'_z(x,y,z) = -2xy\sin 2z$, $f''_{xx}(x,y,z) = 0$, $f''_{xy}(x,y,z) = \cos 2z = f''_{yx}(x,y,z)$, $f''_{xz}(x,y,z) = -2y\sin 2z = f''_{zx}(x,y,z)$, $f''_{yy}(x,y,z) = 0$, $f''_{yz}(x,y,z) = -2x\sin 2z = f''_{zy}(x,y,z)$, $f''_{zz}(x,y,z) = -4xy\cos 2z$; **n)** $f'_x(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $f'_y(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $f'_z(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $f''_{xx}(x,y,z) = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f''_{xy}(x,y,z) = -\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = f''_{yx}(x,y,z)$, $f''_{xz}(x,y,z) = -\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = f''_{zx}(x,y,z)$, $f''_{yy}(x,y,z) = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f''_{yz}(x,y,z) = -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = f''_{zy}(x,y,z)$, $f''_{zz}(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$; **o)** $f'_x(x,y,z) = ye^{xy-z}$, $f'_y(x,y,z) = xe^{xy-z}$, $f'_z(x,y,z) = -e^{xy-z}$, $f''_{xx}(x,y,z) = y^2e^{xy-z}$, $f''_{xy}(x,y,z) = (1+xy)e^{xy-z} = f''_{yx}(x,y,z)$, $f''_{xz}(x,y,z) = -ye^{xy-z} = f''_{zx}(x,y,z)$, $f''_{yy}(x,y,z) = x^2e^{xy-z}$, $f''_{yz}(x,y,z) = -xe^{xy-z} = f''_{zy}(x,y,z)$, $f''_{zz}(x,y,z) = e^{xy-z}$. **50. a)** $f'''_{yxx}(x,y) = 2y^3(2+xy^2)e^{xy^2}$; **b)** $f'''_{yyx}(x,y) = \frac{4x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$; **c)** $f'''_{yyx}(x,y) = -x(2\sin(xy) + xy\cos(xy))$; **d)** $f'''_{zyx}(x,y,z) = \frac{24x^3}{y^3z^4}$; **e)** $f'''_{xyz}(x,y,z) = (1+3xyz+x^2y^2z^2)e^{xyz}$. **51. a)** $z'(x) = \frac{dz}{dx}(x) = \frac{e^x+3x^2e^{x^3}}{e^x+e^{x^3}}$; **b)** $z'(x) = \frac{dz}{dx}(x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{x^2}$; **c)** $z'(t) = \frac{dz}{dt}(t) = e^{\sin t-2t^3}(\cos t - 6t^2)$; **d)** $z'(t) = \frac{dz}{dt}(t) = 0$; **e)** $z'_u(u,v) = \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) = 4uv$, $z'_v(u,v) = \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) = 2u^2 - 6v^2$. **52. a)** $y' = -\frac{2x-y+1}{-x+4y-1}$, $y'' = -\frac{2(7x^2+14y^2-7xy+7x-7y+2)}{(-x+4y-1)^3}$; **b)** $y' = -\frac{y^2}{xy-1}$, $y'' = \frac{y^3(2xy-3)}{(xy-1)^3}$; **c)** $y' = -\frac{2xy}{x^2-2e^{2y}}$, $y'' = -\frac{2y(x^2-2e^{2y})(3x^2+2e^{2y})+16x^2y^2e^{2y}}{(x^2-2e^{2y})^3}$; **d)** $y' = \frac{e^y}{e^x+e^y}$, $y'' = -\frac{e^{2x+y}}{(e^x+e^y)^3}$.
53. a) minimum lokalne w punkcie $(1,0)$ równe $f(1,0) = 0$; **b)** brak ekstremów lokalnych; **c)** minimum lokalne w punkcie $(-1,3)$ równe $f(-1,3) = -7$; **d)** brak ekstremów lokalnych; **e)** minimum lokalne w punkcie $(0,-1)$ równe $f(0,-1) = -7$; **f)** maksimum lokalne w punkcie $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ równe $f\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$; **g)** minimum lokalne w punkcie $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$ równe $f\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{13}{3}$; **h)** maksimum lokalne w punkcie $(1,0)$ równe $f(1,0) = 1$; **i)** minimum lokalne w punkcie $(1,1)$ równe $f(1,1) = -1$; **j)** minimum lokalne w punkcie $\left(\frac{27}{2}, 5\right)$ równe $f\left(\frac{27}{2}, 5\right) = -\frac{109}{4}$; **k)** minimum lokalne w punkcie $(8,24)$ równe $f(x,y) = -448$; **l)** maksimum lokalne w punkcie $(-2,-1)$ równe $f(-2,-1) = 28$, minimum lokalne w punkcie $(-2,-1)$ równe $f(-2,-1) = -28$; **m)** minimum lokalne w punkcie $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)$ równe $f\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right) = 3\sqrt[3]{4}$; **n)** minimum lokalne w punkcie $(1,2)$ równe $f(x,y) = 7 - 10\ln 2$; **o)** minimum lokalne w punkcie $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ równe $f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{2}{e}$; **p)** minimum lokalne w punkcie $(4,4)$ równe $f(4,4) = 12$; **q)** minimum lokalne w punkcie $(-1,-2,3)$ równe $f(-1,-2,3) = -14$; **r)** maksimum lokalne w punkcie $(4,-3,6)$ równe $f(4,-3,6) = 61$; **s)** minimum lokalne w punkcie $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$ równe $f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right) = -\frac{7}{3}$; **t)** minimum lokalne w punkcie $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ równe $f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$. **54. a)** $F(x,y) = xy + C$; **b)** $F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + C$; **c)** $F(x,y) = \sin x + x^3y - \frac{1}{3}y^3 + C$; **d)** $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + C$; **e)** $F(x,y,z) = x^3 + 2xy^2 + y^2 + 3xz - yz - 2z + C$.

Całka podwójna

55. Obliczyć następujące całki podwójne $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, jeśli:

a) $f(x,y)=xy,\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 4, 4\leqslant y\leqslant 12\};$

b) $f(x,y)=xy(x-y),\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\};$

c) $f(x,y)=1,\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\};$

d) $f(x,y)=\dfrac{x}{y},\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):y\leqslant x\leqslant 2y, 2\leqslant y\leqslant 4\};$

e) $f(x,y)=x+y,\ \ (x,y)\in D,\ \ D$ - trójkąt o wierzchołkach $A=(0,0),\ \ B=(1,0),\ \ C=(0,1);$

f) $f(x,y)=x^2+y,\ \ (x,y)\in D,$

D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $y=x,\ \ y=-x,\ \ y=1;$

g) $f(x,y)=x-y,\ \ (x,y)\in D,$

D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $y=0,\ \ y=x,\ \ x+y=2;$

h) $f(x,y)=x+y,\ \ (x,y)\in D,$

D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $x=0,\ \ y=0,\ \ x+y=2;$

i) $f(x,y)=x^2+y^2,\ \ (x,y)\in D,$

D - trójkąt ograniczony prostymi o równaniach $y=0,\ \ y=x,\ \ x=1;$

j) $f(x,y)=x^2+y^2,\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 16\};$

k) $f(x,y)=e^{x^2+y^2},\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\};$

l) $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\};$

m) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\};$

n) $f(x,y)=\dfrac{1}{1+x^2+y^2},\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\};$

o) $f(x,y)=x+y,\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\};$

p) $f(x,y)=x-y,\ \ (x,y)\in D,\ \ D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 9, y\leqslant 0\}.$

56. Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi o równaniach:

a) $y=2x-x^2,\ \ y=x^2;$ **b)** $4y=x^2-4x,\ \ x-y-3=0,$

57. Obliczyć objętości brył ograniczonej powierzchniami o równaniach:

a) $x+y+z-6=0,\ \ 3x+y-6=0,\ \ 3x+2y-12=0,\ \ y=0,\ \ z=0;$

b) $2x+3y+z-6=0,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0;$ **c)** $z=1+x^2+y^2,\ \ x+y-4=0,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0;$

d) $z=x^2+y^2,\ \ x=0,\ \ y=2x,\ \ y=1,\ \ z=0;$ **e)** $z=x^2+y^2,\ \ y=x^2,\ \ y=1,\ \ z=0.$

58. Obliczyć pole części płaszczyzny $3x+4y+6z-12=0$, której rzutem na płaszczyznę Oxy jest prostokąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$.

59. Obliczyć pole części płaszczyzny $3x+4y-z+5=0$, której rzutem na płaszczyznę Oxy jest kwadrat o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Odpowiedzi. 55. a) 512; **b)** $-\frac{2}{3}$; **c)** $\frac{2}{3}$; **d)** 9; **e)** $\frac{1}{3}$; **f)** $\frac{5}{6}$; **g)** $\frac{2}{3}$; **h)** $\frac{8}{3}$; **i)** $\frac{1}{3}$; **j)** 128π; **k)** πe; **l)** π; **m)** 2π; **n)** $\frac{\pi}{2}\ln 2$; **o)** $\frac{16}{3}$; **p)** 18. **56. a)** $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{8}{3}$. **57. a)** 12; **b)** 6; **c)** $\frac{152}{3}$; **d)** $\frac{13}{96}$; **e)** $\frac{88}{105}$. **58.** $\frac{1}{3}\sqrt{61}$. **59.** $\sqrt{26}$.

Całka potrójna

60. Obliczyć następujące całki potrójne $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, jeśli:

$$\textbf{a)}\ f(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},\quad (x,y,z)\in V,\quad V=\{(x,y,z):1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 2, 1\leqslant z\leqslant 2\};$$

$$\textbf{b)}\ f(x,y,z)=\frac{1}{5}(4x^2+4xy+y^2-8x-4y+1),\quad (x,y,z)\in V,$$
$$V=\{(x,y,z):0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2, 0\leqslant z\leqslant 3\};$$

$$\textbf{c)}\ f(x,y,z)=z,\quad (x,y,z)\in V,\quad V=\{(x,y,z):z\leqslant x\leqslant y, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant y\};$$

$$\textbf{d)}\ f(x,y,z)=z,\quad (x,y,z)\in V,\quad V=\{(x,y,z):0\leqslant x\leqslant z, z-x\leqslant y\leqslant z+x, 0\leqslant z\leqslant 1\};$$

$$\textbf{e)}\ f(x,y,z)=z,\quad (x,y,z)\in V,\quad V=\{(x,y,z):0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x, 0\leqslant z\leqslant x\};$$

$$\textbf{f)}\ f(x,y,z)=\frac{1}{(x+y+z+1)^2},\quad (x,y,z)\in V,$$

V - obszar określony warunkami $x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0,\ \ z\geqslant 0,\ \ x+y+z\leqslant 1;$

$$\textbf{g)}\ f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2},\quad (x,y,z)\in V,\quad V=\{(x,y,z):x^2+y^2\leqslant 16, 0\leqslant z\leqslant 3\};$$

$$\textbf{h)}\ f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\quad (x,y,z)\in V,\quad V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=25\}.$$

61. Obliczyć objętość bryły V, jeśli:

$$\textbf{a)}\ V=\{(x,y,z):x^2+y^2=36, -5\leqslant z\leqslant 5\};$$

$$\textbf{b)}\ V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1, z\leqslant 0\};\qquad \textbf{c)}\ V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=49, z\geqslant 0\}.$$

Odpowiedzi. 60. a) $3\ln 2$; **b)** $\frac{4}{5}$; **c)** $\frac{1}{24}$; **d)** $\frac{1}{4}$; **e)** $\frac{1}{8}$; **f)** $\frac{3}{4}-\ln 2$; **g)** 128π; **h)** 2500π. **61. a)** 360π; **b)** $\frac{2}{3}\pi$; **c)** $\frac{686}{3}\pi$.