

1. Wyznacz z definicji pochodną funkcji:

$$\text{a). } f(x) = x^2 \quad \text{b). } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{c). } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{d). } f(x) = \sin x$$

2. Wyznacz dziedzinę i oblicz pochodną funkcji:

$$\text{a). } f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} + 1 \quad \text{b). } f(x) = \sqrt[4]{x^3} \quad \text{c). } f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^5}} \cdot x \quad \text{d). } f(x) = \frac{x^5 + x^3 + 2x + 3}{x^3}$$

$$\text{e). } f(x) = \sin x \cdot \cos x \quad \text{f). } f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{g). } f(x) = \frac{2-x}{2x+1} \quad \text{h). } f(x) = \frac{3-\sin x}{3x}$$

$$\text{i). } f(x) = \frac{2x^2+1}{2x+3} \quad \text{j). } f(x) = \frac{1+2x^3}{2x+3} \quad \text{k). } f(x) = \frac{x^2 \sin x}{x^2+1} \quad \text{l). } f(x) = 3^x x^3$$

3. Wyznacz dziedzinę i oblicz pochodną funkcji:

$$\text{a). } f(x) = \sin(1+3x) \quad \text{b). } f(x) = \sqrt{2-x^2} \quad \text{c). } f(x) = (x^2+12)^8 \quad \text{d). } f(x) = \sqrt{\sin(2-2x^2)}$$

$$\text{e). } f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} \quad \text{f). } f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x+3}} \quad \text{g). } f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}} \quad \text{h). } f(x) = 3e^{-x^2} \quad \text{i). } f(x) = 5e^{\cos x}$$

$$\text{j). } f(x) = \arcsin 2x \quad \text{k). } f(x) = 2 \ln(10x) \quad \text{l). } f(x) = 5 \ln \left| \frac{5}{x-2} \right| \quad \text{m). } f(x) = x^2 e^{-x} - \frac{1}{3} e^{-3x}$$

$$\text{n). } f(x) = (1+\sqrt{x})^3 \quad \text{o). } f(x) = \ln^2 x \quad \text{p). } f(x) = \ln \operatorname{tg} x \quad \text{q). } f(x) = \operatorname{tg} \sin 3x \quad \text{r). } f(x) = \ln \operatorname{tg} 3x$$

$$\text{s). } f(x) = x^2 e^{2x} \sin x \quad \text{t). } f(x) = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{\cos \frac{x}{2}} \quad \text{u). } f(x) = x^x \quad \text{v). } f(x) = x^{x^x} \quad \text{w). } f(x) = x^{\sin x}$$

4. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 :

$$\text{a). } f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x < 1 \\ x^2-2x, & x \geq 1, \end{cases} \quad x_0 = 1 \quad \text{b). } f(x) = \begin{cases} -x^2+1, & x < 0 \\ x^2+1, & x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0 \quad \text{c). } f(x) = |x+1|, \quad x_0 = -1$$

5. Dla jakiej wartości parametru a funkcja jest różniczkowalna w całej dziedzinie?

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ ax+b, & x \geq 1, \end{cases}$$

6. Wyznacz drugą pochodną funkcji:

$$\text{a). } f(x) = \frac{x^2-1}{3x^3+1} \quad \text{b). } f(x) = 4e^{-2x} \quad \text{c). } f(x) = \sin(2x+3)$$

7. Wyznacz $f^{(n)}$

$$\text{a). } f(x) = e^{-2x} \quad \text{b). } f(x) = \sin x \quad \text{c). } f(x) = \cos x \quad \text{d). } f(x) = \ln(2x) \quad \text{e). } f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad \text{f). } f(x) = \operatorname{sh} x$$

8. Wyznacz równanie stycznej do krzywej $f(x)$ w punkcie x_0 :

$$\text{a). } f(x) = x^2 + 3x + 2, \quad x_0 = 2 \quad \text{b). } f(x) = e^x, \quad x_0 = 0 \quad \text{c). } f(x) = \ln x^2, \quad x_0 = e$$

9. Korzystając z reguły de L'Hospitala oblicz granice:

$$\text{a). } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x} \quad \text{b). } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \quad \text{c). } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x \quad \text{d). } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x} \quad \text{e). } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{\ln(x-1)} - \frac{1}{x-2} \right)$$

$$\text{f). } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \cdot \ln x) \quad \text{g). } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x^x \quad \text{h). } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^x$$

10. Korzystając z różniczki funkcji oblicz przybliżoną wartość wyrażenia:

a). $\sqrt{25,3}$ b). $\sin 31^\circ$ c). $e^{0,003}$ d). $2^{1,999}$

11. Napisz wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla funkcji $f(x)$, punktu x_0 i podanego n :

a). $f(x) = e^{-2x}, x_0 = 0, n = 5$ b). $f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{2}, n = 5$

12. Korzystając ze wzoru Taylora oblicz przybliżoną wartość wyrażenia z dokładnością $\alpha = 10^{-3}$

a). $\sqrt{25,3}$ b). $\sin 31^\circ$ c). e d). $2^{1,999}$

13. Oszacuj dokładność wzoru przybliżonego funkcji:

a). $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}, |x| < \frac{\pi}{4}$ b). $\sqrt[3]{x+1}, 0 < x < 0,1$

14. Wyznacz przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji:

a). $f(x) = x^4 - 8x^2 - 7$ b). $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ c). $f(x) = \sin 2x$

15. Wyznacz przedziały wypukłości funkcji oraz punkty przegięcia funkcji:

a). $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$ b). $f(x) = x^4$

16. Zbadaj przebieg zmienności funkcji:

a). $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ b). $f(x) = x + \frac{1}{x}$ c). $f(x) = x + \cos x$ d). $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

17. Rozłóż 16 na sumę dwóch liczb takich, żeby suma ich kwadratów była najmniejsza.

18. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa oraz ramiona mają długości 10 cm. Dobierz długość drugiej podstawy tak, by pole trapezu było największe.

19. Tekst na stronie w książce zajmuje powierzchnię 200 cm^2 , marginesy z lewej i z prawej strony są równe 1 cm, a z dołu i góry – po 2 cm. Jak powinien być wymiar kartki, aby zużyć jak najmniej papieru?

20. Puszka w kształcie walca ma mieć objętość $250\pi \text{ cm}^3$. Jakie musi ona mieć wymiary, aby do jej produkcji zużyć jak najmniej blachy?

21. Jakie jest maksymalne pole prostokąta wpisanego w półokrąg o średnicy $2r$?